

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Пауль Светлана Владимировна

**РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ АНАЛИЗА ПОТОКОВ С
ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБЪЕМОМ ПОСТУПАЮЩИХ ТРЕБОВАНИЙ И
СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ**

1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор технических наук, профессор
Назаров Анатолий Андреевич

Томск – 2022

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ.....	7
ГЛАВА 1 ПОТОКИ СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБЪЕМОМ ПОСТУПАЕМЫХ ТРЕБОВАНИЙ	30
1.1 Поток восстановления с произвольным объемом поступающих требований	30
1.1.1 Характеристическая функция объема информации, поступившей за определенное время в потоке восстановления	32
1.2 ММРР-поток с произвольным объемом поступаемых требований	43
1.3 Полумарковский поток с произвольным объемом поступающих требований	50
1.3.1 Исследование допредельной модели полумарковского потока	55
1.3.2 Асимптотическое распределение вероятностей значений объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока в предельном условии растущего времени.	61
1.4 Область применимости асимптотических результатов для исследования потоков с произвольным объемом поступающих требований в допредельной ситуации	67
1.5 Резюме	74
ГЛАВА 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ	76
2.1 RQ-система ММРР M 1 с разнотипными вызываемыми заявками	76
2.2 RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором	86
2.2.1 RQ-система M M 1 с несколькими типами вызываемых заявок и ненадежным прибором.....	86
2.2.2 Условие существования стационарного режима в RQ-системе M GI 1 с однотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором.....	89

2.2.3	Характеристическая функция числа заявок в RQ-системе $M GI 1$ с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и обслуживанием прерванных заявок заново	101
2.3	Тандемные RQ-системы с общей орбитой	105
2.3.1	Тандемная RQ-система с общей орбитой и входящим MMPP-потокотом	105
2.4	Многолинейные RQ-системы	109
2.4.1	RQ-система $M H_2 N$	111
2.4.2	RQ-система $M M, M 1$ с двухфазным специальным обслуживанием .	115
2.5	Резюме	120
ГЛАВА 3 МЕТОДЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ МОДИФИКАЦИИ.....		122
3.1	Исследование RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками в различных асимптотических условиях	123
3.1.1	Выбор предельного условия	123
3.1.2	Асимптотический анализ RQ-системы MMPP M 1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите	124
3.1.3	Асимптотический анализ RQ-системы MMPP M 1 N с N типами вызываемых заявок в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызывания заявок	134
3.1.4	Асимптотический анализ RQ-системы MMPP M 1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок	143
3.1.5	Точность аппроксимаций распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP M 1 с разнотипными вызываемыми заявками	147
3.2	Исследование RQ-систем $M M 1$ с несколькими типами вызываемых заявок и ненадежным прибором	150

3.2.1 Асимптотический анализ RQ-системы $M M 1$ с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором в предельном условии большой задержки заявок на орбите.....	151
3.2.2 Точность аппроксимаций распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M M 1$ с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором.....	157
3.3 Тандемная RQ-система с общей орбитой $M M 1$	158
3.3.1 Асимптотический анализ RQ-системы с общей орбитой $M M 1$ в предельном условии большой задержки заявок на орбите	159
3.3.2 Точность аппроксимаций распределения вероятностей числа заявок на орбите в тандемной RQ-системе $M M 1$ с общей орбитой	163
3.4 Резюме	164
ГЛАВА 4 МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКИ ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА.....	165
4.1 Исследование RQ-системы $MMPP M 1$ с N типами вызываемых заявок ...	166
4.1.1 Метод асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы $MMPP M 1$ с разнотипными вызываемыми заявками.....	166
4.1.2 Точность диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $MMPP M 1$ с разнотипными вызываемыми заявками	176
4.2 Исследование RQ-системы $M M 1$ с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором	180
4.2.1 Метод асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы $M M 1$ с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором	180
4.2.2 Точность диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M M 1$ с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором.....	189
4.3 Исследование тандемной RQ-системы $MMPP M 1$ с общей орбитой	190

4.3.1	Метод асимптотически-диффузионного анализа тандемной RQ-системы $M MP 1$ с общей орбитой.....	191
4.3.2	Построение дискретного распределения, аппроксимирующего стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.....	200
4.4	Резюме	204
ГЛАВА 5 МНОГОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ		
.....		205
5.1	Исследование многолинейной RQ-системы $M H_2 N$	206
5.1.1	Метод асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы $M H_2 N$	206
5.1.2	Построение дискретного распределения, аппроксимирующего стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите	216
5.1.3	Точность предлагаемых аппроксимаций для системы $M H_2 N$ при гиперэкспоненциальном распределении времени обслуживания.....	218
5.2	Исследование N -линейной RQ-системы со специальным обслуживанием.....	220
5.2.1	Метод асимптотически-диффузионного анализа многолинейной RQ-системы $M M, M N$ с двухфазным специальным обслуживанием	221
5.2.2	Построение дискретного распределения, аппроксимирующего стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите	232
5.2.3	Точность предлагаемых аппроксимаций для RQ-системы $M M, M N$ со специальным обслуживанием	233
5.3	Резюме	234
ГЛАВА 6 ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ДОПРЕДЕЛЬНОЙ СИТУАЦИИ И КОМПЛЕКС ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРОГРАММ И АЛГОРИТМОВ.....		236
6.1	Численная реализация формул для получения аппроксимаций и допредельных распределений вероятностей объема информации, поступившей в потоках со случайным объемом требований за время t	237

6.1.1 Поток восстановления.....	238
6.1.2 ММРР-поток	240
6.1.3 Полумарковский поток	245
6.2 Численная реализация формул для получения распределений вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах различной конфигурации.....	250
6.2.1 RQ-система ММРР M 1 с разнотипными вызываемыми заявками	250
6.2.2 RQ-система M M 1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором.....	264
6.2.3 Тандемная RQ-система с общей орбитой	268
6.2.4 Многолинейная RQ-система M H ₂ N	271
6.2.5 Многолинейная RQ-система M M, M N с двухфазным специальным обслуживанием	277
6.3 Резюме	283
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	285
ЛИТЕРАТУРА	289
ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	312

Введение

Актуальность работы. В настоящее время теория массового обслуживания (ТМО) стремительно развивается. Если первоначально наибольший интерес у исследователей вызывали вопросы обслуживания абонентов телефонной станции [15, 16, 24], то сейчас можно с уверенностью утверждать, что такого типа задачи возникают в самых различных направлениях: в экономике, технике, транспорте и, главным образом, в информационных технологиях, стремительное развитие которых вызывает большой рост требований к телекоммуникационным системам. По мере усложнения реальных систем, возникает проблема выбора методов и способов их исследования. Главным образом возникает проблема приближения условий, в которых существуют описывающие реальные процессы математические модели, к истинной картине изучаемых явлений.

Основоположником ТМО считают датского ученого Агнер Краупа Эрланга (1878 – 1929 гг.). Будучи сотрудником Копенгагенской телефонной компании, Эрланг в 1909 г. опубликовал первую работу «Теория вероятностей и телефонные переговоры» [138]. В данной статье был решен ряд задач по теории систем массового обслуживания с отказами. Предметом исследования служили телефонные системы, которые характеризовались случайным потоком входящих вызовов абонентов, требующих случайного времени занятости телефонной линии. Эрлангом была получена формула для расчета доли вызовов, обслуженных на телефонной станции. Его научные результаты до сих пор используются при исследовании современных телекоммуникационных сетей.

Активное развитие ТМО получила во второй половине 20-го века в работах С. Palm [227], D. G. Kendall [25, 157], L. Kleinrock [27], T. L. Saaty [73], А. Я. Хинчин [84, 85, 86], Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко [16], Г. П. Башарин [1].

Принято считать, что термин «теория массового обслуживания» (в англоязычной литературе queueing theory – теория очередей) в русской научной литературе был введен Александром Яковлевичем Хинчиным (1894 – 1959 гг.). Этот ученый внес весомый вклад в создание математического аппарата теории массового обслуживания [85, 86].

Большое влияние на развитие ТМО также оказали работы советских ученых Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко [16, 17], Башарина Г. П. [1, 2, 3, 4].

В 80-х гг. 20-го века с появлением систем ЭВМ интерес к теории массового обслуживания возрос еще больше [5, 6, 88]. Многочисленные исследования телекоммуникационных потоков и систем того времени показали неадекватность классических моделей потоков реальным данным. Возникшая проблема привела к возникновению математических моделей коррелированных потоков и рассмотрению моделей СМО, выходящих за рамки систем с ожиданием и систем с потерями. При этом, нужно отметить, что исследователи по-прежнему используют классические потоки в качестве моделей трафика из-за простоты математического и численного анализа таких моделей.

Если говорить о классических моделях потоков, то в 20-х годах прошлого века. G. Jule ввел понятие процесса чистого размножения, решая задачи теории эволюции, а в 30-х годах уже W. Feller ввел понятие процесса гибели и размножения.

Ряд работ прошлого века посвящен изучению пуассоновского потока. В работе E. Marczewski [181] установлено усиленное свойство отсутствия последствия. В работе T. Nisida [225] исследуются некоторые функционалы от пуассоновского потока, в частности расстояния от произвольного момента до события потока, определяемого некоторым дополнительным условием. T. Nida [153] изучал распределение максимального интервала между событиями пуассоновского потока и получил ряд предельных теорем. Полезное для приложений в теории массового обслуживания асимптотическое разложение, связанное с законом Пуассона, получено Л.Ф. Китаниным [26]. Подробно исследован пуассоновский поток в работе Д. Кокса и П. Льюиса [28].

Исследованию рекуррентного потока событий посвящено не меньшее количество работ. В книге Д. Кокса, В. Смита [29] подробно исследуется рекуррентный поток событий как основная и наиболее простая модель теории восстановления. Данная теория получила многочисленные применения в ряде направлений исследования – теории надежности, теории массового обслуживания, теории запасов и

многих других приложениях. Результаты теории восстановления являются мощным средством исследования как теоретических, так и прикладных проблем. Часто применение того или иного факта теории восстановления позволяет очень просто получать результаты, которые сложно и трудно получить при другом подходе.

Следуя необходимости создания адекватных моделей различных явлений и систем, многие исследователи разработали схемы потоков событий, при помощи которых можно учитывать различные реальные факторы и, в частности, зависимость длин интервалов между поступающими требованиями.

В 70-х годах 20-го века Е. Cinlar предложил модель марковские аддитивных процессов (Markov Additive Processes) [127], управляющий процесс которого являлся процесс с независимыми приращениями. Потоки событий, для которых управляющий процесс имеет независимые приращения, были названы А. Я. Хинчиным потоками без последействия [84]. Поэтому марковские потоки некоторое время назывались потоками без последействия, до тех пор, пока на одном из семинаров в МГУ Г. П. Климов не предложил для этого класса потоков сокращенное название МС-потоки (от Markov Chain). После того как М. F. Neuts предложил свою модель марковских потоков [222, 223], такие модели стали называть N -процессами [116, 176, 238, 241]. В 90-х годах М. F. Neuts для марковских потоков было придумано, а затем, во время нового всплеска исследований, уточнено Лукантони понятие марковского потока однородных событий (Markovian Arrival Process), [179, 180, 222]. Таким образом, стало использоваться сокращение MAP [180], которое уже использовалось для обозначения марковских аддитивных процессов Е. Cinlar. Чтобы избежать путаницы в 2003 г. S. Asmussen в своей книге [110] предложил использовать для Markovian Arrival Process сокращение MArP, но по-прежнему как для Markov Additive Processes, так и для Markovian Arrival Process чаще используется сокращение MAP [65, 66].

Одним из наиболее распространенных частных случаев MAP-потока является марковски модулированный пуассоновский поток событий (MMPP-поток) [15, 180].

В терминах различных математических школ МАР-потоки также называются *дважды стохастическими потоками*, которые были введены в 1964 году J. F.C. Kingman [164]. В таких потоках, во-первых, интервалы времени между наступлениями событий являются случайными, во-вторых, с течением времени интенсивность потока меняется случайным образом.

Наиболее общим потоком однородных событий является полумарковский поток (Semi-Markovian process) [30]. Идея введения такого потока была выдвинута П. Леви (1954) и В. Смитом (1955). В книге Д. Кокса, В. Смита [29] наряду с исследованием простого процесса восстановления (рекуррентного потока) представлен альтернирующий процесс восстановления, модель которого может быть обобщена на случай полумарковского потока или его частного случая – потока марковского восстановления (Markovian renewal process).

Исследования последних лет реальных сетевых потоков показывают, что такие потоки могут обладать уникальными свойствами, такими как фрактальность или самоподобие (рассмотрение интервала высокой интенсивности в более детальном масштабе времени приводит к получению потока с такой же структурой, как у всего потока), коррелированность, пачечность (интервалы высокой интенсивности сменяются интервалами с низкой или даже нулевой интенсивностью потока), нестационарность и т. д. [121, 123, 150, 151, 182, 260, 263]. Для описания современных сетевых потоков могут использоваться известные модели непуассоновских потоков. Например, выбирая подходящие параметры потока определенным образом, можно добиться смены коротких интервалов с интенсивным трафиком на более длительные периоды без наступления событий. Используя модели более высокого порядка (например, расширение пространства состояний МАР), можно достичь нескольких уровней самоподобия [192, 211, 213, 215].

С развитием новейших технологий связи остро встала проблема моделирования трафика в телекоммуникационных системах. Модели систем с пуассоновскими входящими потоками теряют свою актуальность в связи с тем, что передача данных в беспроводных сетях имеет нерегулярный характер. Возникает необходимость

учитывать такие особенности потока передаваемой информации как долговременная зависимость, так называемые «тяжелые хвосты» распределений длин интервалов между моментами наступления событий [113, 120].

До недавнего времени были попытки моделировать такие потоки как суперпозицию нескольких пуассоновских потоков [129, 144]. Среди российских ученых разработкам моделей трафика с самоподобной структурой и СМО с такими потоками уделяли внимание О. И. Шелухин [89, 90, 91] и В. Н. Задорожный [20, 21]. Также представляет интерес долговременная зависимость трафика, возникающая как свойство процессов, описывающих поступление заявок в телекоммуникационных системах [32, 75, 82, 83]. Для учета этих эффектов используются модели коррелированных потоков.

Исследованию специальных потоков событий методами асимптотического анализа посвящена работа [34].

Появление новых моделей потоков оказало существенное влияние на развитие как самих систем массового обслуживания, так и методов их исследования.

Исследованию в области ТМО посвящены работы следующих российских авторов: Г. П. Башарин [1], К. Е. Самуйлов [74] и Ю. В., Гайдамака [12, 13, 68], П. П. Бочаров, А. В. Печинкин [8, 9], А. А. Боровков [7], Г. И. Фалин [141, 142], В. В. Рыков [240], В. М. Вишневецкий [11], Е. В. Морозов [124], М. Фархадов [119], В. А. Наумов [65, 66], Г. Ш. Цициашвили [87], А.В. Войтишек [255], А. В. Зорин [23], С. П. Сущенко [81, 237], А. М. Горцев [18], Л. А. Нежелская [67], А. Ф. Терпугов, А. А. Назаров [63, 64, 207], С. П. Моисеева [178, 210], А. Н. Моисеев [185]; зарубежных авторов: J.R. Artalejo [106, 108, 107, 109], А.Н. Дудин [135], Е. А. Krishnamoorthy [245], А. Melikov [184], М. Pagano [188], Т. Phung-Duc [191], J. Sztrik [251], О. Tikhonenko [250].

В некоторых современных реальных системах по техническим причинам отсутствует бункер для ожидания поступивших заявок, которые не могут мгновенно быть приняты к обслуживанию, но их потеря недопустима. Примером таких систем являются телекоммуникационные системы, в которых сообщения не теряются, а осуществляется только задержка в их обслуживании. Повторные вызовы могут

быть вызваны отсутствием свободных обслуживающих приборов или отсутствием соединения по техническим причинам, и игнорировать данные эффекты в реальных системах нельзя. В связи с этим, в середине прошлого века выделили новый класс систем массового обслуживания – системы с повторными вызовами (Retrial Queueing System или RQ-системы).

Первые работы, посвященные RQ-системам, появились в 40-50-х годах XX века [128, 168, 258]. В статьях освещается необходимость учитывать повторные обращения, возникающие в обслуживающих системах при блокировке поступивших заявок. Такие заявки не покидают систему, а всей своей совокупностью формируют поток вторичных обращений к прибору, что приводит к изменениям в характере случайных процессов, описывающих функционирование системы. Вследствие этого, появилась необходимость отразить такое поведение заявок в системе в математической модели, что и привело к появлению RQ-систем.

Чтобы учесть повторные обращения в системе массового обслуживания выделяется место, называемое орбитой. Поведение заблокированной заявки в системе следующее: она поступает на орбиту, где осуществляет задержку, длительность которой обычно моделируется как случайная величина. Наибольшее распространение получили модели с экспоненциальным распределением времени пребывания заявки на орбите. По окончании задержки заявки на орбите независимо друг от друга пытаются обратиться к прибору и получить обслуживание. При неудачной попытке заявка возвращается на орбиту для реализации еще одной задержки. Поток повторных обращений в таком случае имеет интенсивность, зависящую от числа заявок на орбите. Также рассматриваются модели с постоянной суммарной интенсивностью повторных обращений или иными дисциплинами повторных обращений. В статье [262] представлен подробный обзор ранних работ, посвященных RQ-системам и их эффективности при моделировании телефонных систем коммутации.

В 70–80-х годах 20-го века ученые начали предпринимать попытки к математическому описанию систем с повторными вызовами. Вопросами эргодичности занимались такие ученые, как J.W. Cohen [128], N. Deul [130], G.I. Falin [141, 142], F.C. Foster [145], T. Hanschke [152], А.А. Назаров [53], а также L.I.Sennot [244] и др.

Впоследствии, RQ-системы нашли свое применение в области моделирования телекоммуникационных сетей, так как при организации маршрутизации пакетов в сетях возникает то же поведение пакетов. Если узел сети занят передачей другого пакета, источник начинает передачу заново через какое-то время. Исследованию RQ-систем как моделей сетей связи посвящены монографии [107, 143]. В них рассматриваются методы исследования, разработанные с учетом специфики RQ-систем и классические методы применимые к ним. С обзором современных исследований RQ-систем можно познакомиться в статьях [161, 219].

Современные направления разработки моделей и методов исследования RQ-систем связаны со спецификой их приложений. Помимо повторных обращений, в телекоммуникационных системах необходимо учитывать:

1. надежность прибора (узла связи или оператора),
2. терпеливость заявок (заявки, которым приходится раз за разом осуществлять задержку, могут покинуть систему без обслуживания),
3. особенности процесса обслуживания (обслуживание может протекать в две или более фаз),
4. наличие обратной связи (в некоторых системах заявки по окончании обслуживания могут мгновенно или с некоторой задержкой вновь обратиться к прибору),
5. дисциплину повторных обращений (разные протоколы доступа по-разному организуют повторные обращения) и т. д.

Очевидно, что чем больше особенностей предметной области учитывает математическая модель, тем точнее результаты исследования будут описывать реальную систему. Однако модель, перегруженную различными деталями и нюансами реальной системы, тяжело исследовать аналитически. Возникает необходимость в

разработке новых аналитических методов исследования, позволяющих исследовать модели, учитывающие различные условия функционирования системы, и получать достаточно точные вероятностные характеристики этой модели.

Помимо проблемы моделирования трафика, возникает вопрос как исследовать системы с нерегулярными входящими потоками. Методам исследования СМО с коррелированными потоками посвящены работы А. Н. Дудина, В. И. Клименок и В. М. Вишневого [10, 19, 134].

Так как большинство современных моделей имеют сложную природу или конфигурацию, их не всегда удастся исследовать аналитически. В связи с этим, зачастую применяются численные методы или методы имитационного моделирования. [40, 78, 79, 106, 107, 185, 251]. Аналитические методы применялись, главным образом, в тех случаях, когда модели потока являлись пуассоновскими, а дисциплина обслуживания подчинялась экспоненциальному распределению. RQ-системы с входящими коррелированными потоками активно изучаются учеными белорусской школы А.Н. Дудиным и В. И. Клименок [166, 167], в работах которых используются преимущественно матричные методы решения полученных систем уравнений.

Разработке моделей и асимптотических методов анализа систем с повторными обращениями посвящено немало работ А. А. Назарова и его учеников. Работы Е. А. Судыко и Т. В. Любиной посвящены аналитическим методам исследования RQ-систем с конфликтами заявок [37, 38, 57, 80]. Е. А. Моисеева совместно с А. А. Назаровым занималась разработкой модификаций методов асимптотического анализа в условии большой загрузки для RQ-систем с непуассоновскими входящими потоками [41, 56]. Исследованию RQ-систем с вытеснением заявок посвящены работы Я. Е. Измайловой [55, 58].

RQ-системы с вызываемыми заявками возникли вследствие появления таких обслуживающих систем как смешанные call-центры. В отличие от call-центров, предназначенных исключительно для приема обращений, в смешанных call-центрах операторы могут совершать звонки сами. Это позволяет сократить время простоя в периоды малой нагрузки центра.

Первые исследования таких центров появились в нулевых годах 20-го века и были посвящены статистическому анализу функционирования системы [114, 183]. Аналитические модели базировались на системах массового обслуживания с потерями или с очередью [22, 34, 72].

В то же время появились исследования, посвященные моделированию контакт-центров с помощью RQ-систем. Влиянию повторных обращений на моделирование центров обработки вызовов посвящена работа [92]. Применение RQ-систем подтолкнуло к появлению моделей с несколькими типами заявок разных приоритетов, предназначенных чтобы учесть разнородность занятости операторов [3, 117, 140]. Если предполагается, что помимо приема звонков оператор занят другими видами деятельности, то для моделирования его поведения могут быть применены RQ-системы с прогулками прибора [137, 156, 177, 243]

Модели смешанных call-центров в виде марковской RQ-системы с вызываемыми заявками предложена J.R. Artalejo и T. Phung-Duc [104]. Данный тип систем получил распространение, было предложено множество усложнений с учетом специфики различных областей приложения. В дальнейшем исследовались системы с вызываемыми заявками с произвольным распределением времен обслуживания [105, 242].

В дополнение к классическим RQ-системам, в которых суммарная интенсивность обращений из орбиты зависит от числа заявок на орбите, рассмотрены системы с постоянной интенсивностью повторных обращений [98, 187].

Большое распространение получили замкнутые RQ-системы с вызываемыми заявками [169, 132, 133, 220]. В таких системах число источников поступающих запросов ограничено и каждый источник генерирует заявку только тогда, когда обслужена предыдущая заявка из этого источника. Вследствие такого поведения пользователей число мест на орбите становится ограниченным, что послужило основой для моделирования точек доступа сотовой связи.

Модели RQ-систем с вызываемыми заявками также могут учитывать нестабильность работы оператора и возможные поломки оборудования. В таком случае речь идет о системах с ненадежным прибором, который может выходить из строя

на случайное время и работать в прежнем режиме после возвращения трудоспособности [174, 248, 249].

Тандемные системы массового обслуживания появились в 50-х как модели двухэтапных производственных процессов. Таким образом ранние исследования тандемных систем не имели повторных обращений и были посвящены получению аналитических формул для марковских многофазных моделей производственных линий или транспортных узлов [111, 154, 224, 236, 246, 247]. Тандемным системам массового обслуживания без повторных обращений посвящена обзорная статья [230].

Для моделирования процессов в коммуникационных системах тандемные системы массового обслуживания стали применять в 80-х. Первые работы, посвященные применению двухфазных систем в телекоммуникациях, не учитывали повторные обращения [94, 118, 155].

В первом десятилетии 20-го века данные модели стали использоваться для анализа процессов передачи данных в беспроводных сетях [175, 252]. При исследовании также не учитывались повторные обращения к прибору и рассматривались системы с очередью.

Тандемные RQ-системы впервые были предложены в работах [148, 190]. Рассмотренные модели предполагали наличие орбиты только на первой фазе обслуживания, так как если прибор на второй фазе занят, то заявка закончившая обслуживание на первой фазе блокирует первый прибор до момента освобождения второго. Модели были предложены для исследования телефонных систем с переключением.

В статьях В. И. Клименок [159, 165] рассмотрены тандемные RQ-системы с многолинейными фазами, которые предложены в качестве моделей коммуникационных систем. В статье [159] первая фаза трактуется как базовая станция в соте, а вторая – как система удаленных серверов. Статья [165] посвящена моделированию call-центра со схожей структурой.

Работы [136, 139, 159, 162, 231] посвящены тандемным RQ-системам с потерями. Несмотря на то, что классические системы с повторным обращением, не

предполагают потерь, в случае двухфазной системы с орбитой на первой фазе потери возникают на второй фазе.

Системы массового обслуживания с ненадежным прибором приобрели популярность в 80-е годы и моделировали процессы прерывания обслуживания в реальных системах. Помимо очевидных приложений таких моделей для описания поломок и ремонта элементов систем, их также можно использовать для учета любых перерывов в работе прибора. Ранние исследования таких систем посвящены разработке аппроксимаций для распределений вероятностей, описывающих состояние системы [226, 253, 254]. Выбор аппроксимационных методов исследования был обусловлен сложной структурой уравнений баланса.

Первые системы с повторными вызовами и ненадежным прибором предложены в работах [95, 96, 97, 99, 100, 103] в 80-90-е годы. В статьях рассматриваются модели телефонных систем с функцией повторного набора номера в случае разъединения связи.

Широкое распространение получили модели, в которых время восстановления прибора после поломок зависит от его состояния в момент поломки [95, 96, 171]. Наряду с предыдущими, рассматриваются RQ-системы с, так называемыми, активными поломками [102, 256, 259]. В таких системах прибор выходит из строя только когда занят обработкой заявки. Также в работах [172, 177, 261] рассматривается такой тип отказов прибора как стартовые поломки. В некоторых случаях RQ-системы с ненадежным прибором могут иметь свойства схожие с моделями с прогулками прибора [101, 189].

В начале 2000-х RQ-системы с ненадежным прибором рассматривались в предположении дискретного режима функционирования системы [186, 257]. Были рассмотрены системы с произвольным распределением длительности задержки на орбите наряду с ненадежным прибором [125, 126] и многими другими модификациями, такими как нетерпеливость заявок на орбите [115, 122] или их приоритетность [131].

Многолинейные RQ-системы не получили большого распространения из-за высокой сложности их исследования. Задача нахождения двумерного распределения числа заявок на орбите и числа занятых приборов представляет сложности, так как уравнения, описывающие это распределение, не представимы в матричном виде. Модели с тремя и четырьмя серверами предложены Т. Phung-Duc в работе [234]. Впоследствии тот же коллектив авторов исследовал более общую систему M/M/c/c+ r [232, 235]. Методы численного анализа таких систем рассматривались в статье А. Н. Дудина [160].

Таким образом, задачи анализа моделей непуассоновских потоков и систем массового обслуживания с повторными вызовами различной конфигурации являются актуальными научными проблемами.

Цель и задачи исследования. Целью данной диссертационной работы являются теоретические положения, посвященные разработке и применению математических методов исследования потоков событий со случайным объемом поступающих требований и систем массового обслуживания с повторными вызовами различной конфигурации.

Задачи исследования:

1) разработать математические модели непуассоновских потоков событий со случайным объемом требований, таких как поток восстановления, MMPP-поток, полумарковский поток, обобщающие теорию ординарных и неординарных потоков; получить допредельные и асимптотические распределения вероятностей объема информации, поступающей за определенное время в предложенных потоках событий со случайным объемом требований;

2) разработать модификации метода асимптотического анализа, которые позволят выполнить анализ непуассоновских потоков событий со случайным объемом информации в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками;

3) разработать модификации методов асимптотического анализа, которые позволят выполнить анализ однолинейных систем с повторными вызовами, таких

как RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками, RQ-системы с ненадежным прибором, тандемные RQ-системы с общей орбитой в различных предельных условиях;

4) разработать новые методы асимптотического анализа, которые позволят выполнять анализ систем с повторными требованиями, вызываемыми заявками и непуассоновскими входящими потоками;

5) для исследования однолинейных и многолинейных систем с повторными вызовами разработать и развить метод асимптотически диффузионного анализа, который обладает повышенной точностью и позволяет выполнить анализ предложенных в диссертации моделей;

6) получить выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей числа заявок на орбите в исследуемых однолинейных и многолинейных RQ-системах различной конфигурации;

7) разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа потоков событий со случайным объемом информации и систем с повторными вызовами различной конфигурации, с помощью которого определяются численные значения основных вероятностных характеристик рассматриваемых потоков и систем, а также устанавливается область применимости полученных асимптотических результатов.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации состоит в следующем.

1. Впервые построены математические модели потоков событий, таких как поток восстановления, ММРР-поток, полумарковский поток со случайным объемом требований, обобщающие теорию ординарных и неординарных непуассоновских потоков, позволяющие учитывать особенности реального трафика в телекоммуникационных системах. Получены допредельные интегральные формулы для нахождения распределения вероятностей объема информации, поступающей в предложенных непуассоновских потоках событий со случайным объемом требований за определенное время.

2. Разработаны и предложены модификации метода асимптотического анализа, позволяющие, в отличие от существующих подходов, выполнить анализ непуассоновских потоков событий со случайным объемом информации в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками. С использованием предложенных модификаций асимптотического метода в предельном условии растущего времени наблюдения за потоком получено предельное гауссовское распределение вероятностей объема информации, поступающей в потоке восстановления, ММРР и полумарковском потоке, для которого найдены явные выражения параметров предельного нормального распределения, обобщающие предельные теоремы из класса Центральной предельной теоремы.

3. Методы асимптотического анализа систем с повторными вызовами модифицированы на случай исследования RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками, RQ-систем с ненадежным прибором, tandemных RQ-систем с общей орбитой в различных предельных условиях. Применение данных модификаций обобщают известную методику исследования систем с повторными вызовами на случай более сложных конфигураций моделей.

4. Предложены два новых предельных условия: условие согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок, для которых реализованы методы асимптотического анализа. При этом, при втором предельном условии получена характеристическая функция, отличная от гауссовской.

5. Впервые разработан и предложен метод асимптотически диффузионного анализа, который обладает повышенной точностью, предназначенный для исследования однолинейных и многолинейных систем с повторными вызовами.

6. Для однолинейных и многолинейных RQ-систем различной конфигурации, представленных в диссертационной работе, с использованием разработанных методов и модификаций впервые получены выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей и их аппроксимаций числа заявок на орбите.

7. С использованием разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа потоков событий со случайным объемом требований и RQ-систем различной конфигурации на основе численных экспериментов найдены численные значения основных вероятностных характеристик рассматриваемых потоков и систем, а также установлена область применимости полученных асимптотических результатов.

Методы исследования. Для проведения диссертационных исследований использовался аппарат следующих дисциплин: математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, дифференциальные уравнения и численные методы, а также методы асимптотического анализа.

Для процессов, характеризующих состояния потоков событий с произвольным объемом поступаемых требований и RQ-систем различной конфигурации использовались методы многомерных цепей Маркова и многомерных марковских процессов с дискретными и непрерывными компонентами и метод частичных характеристических функций.

Для решения всех полученных уравнений в диссертации применяются и развиваются методы асимптотического анализа [46, 63] в различных предельных условиях. При исследовании потоков событий с произвольным объемом поступаемых требований системы уравнений решаются в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками. Это позволяет сделать вывод о том, что в данном предельном условии распределения объема информации, поступившей в исследуемых непуассоновских потоках, являются асимптотически гауссовскими. Здесь принципиальным различием являются только выражения для вычисления математического ожидания и дисперсии, которые определяют гауссовское распределение. Данные основные характеристики будут зависеть только от вида модели потока.

При исследовании RQ-систем различной конфигурации применяется асимптотический метод в предельных условиях большой задержки заявок на орбите, а

также новые, предложенные в диссертации предельные условия, такие как согласованно высокой интенсивности вызывания заявок, согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок.

Разработан и предложен метод асимптотически-диффузионного анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите для исследования предложенных в диссертации RQ-систем. Для распределения вероятностей числа заявок на орбите в исследуемых системах можно построить аппроксимацию данного распределения методом асимптотически-диффузионного анализа, который проводится в три этапа. На первом этапе находится асимптотическое стационарное распределение вероятностей состояний прибора системы и функция $a(x)$, которая имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите. При реализации второго этапа асимптотического анализа находится функция $b(x)$ – коэффициент диффузии процесса, определяющий асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите. Применяя полученные функции $a(x)$ и $b(x)$ на третьем этапе реализуется метод асимптотически диффузионного анализа и находится непрерывное предельное распределение, на основе которого строится достаточно точная аппроксимация для допредельного дискретного распределения вероятностей состояний рассматриваемой RQ-системы.

Для оценки области применимости полученных асимптотических результатов используются численные методы. Проведенный анализ позволяет определить область применимости асимптотических результатов на основе проведения многочисленных компьютерных экспериментов. Указанный анализ произведен с использованием представленного в диссертации комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов численных расчетов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Впервые в теории массового обслуживания предложены модификации метода асимптотического анализа в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками событий с произвольным объемом поступаемых требований, которые позволяют построить гауссовские аппроксимации распределения объема информации.

Предложены модификации методов асимптотического анализа, которые позволяют проводить исследование RQ-систем различной конфигурации, таких как RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками, RQ-системы с ненадежным прибором, тандемные RQ-системы с общей орбитой. Данные методы вносят существенный вклад в теорию массового обслуживания, так как, в отличие от существующих подходов, позволяют решать задачи анализа систем с повторными вызовами для случаев непуассоновских входящих потоков и неэкспоненциального обслуживания.

Впервые предложен метод асимптотически диффузионного анализа, который обладает повышенной точностью и предназначен для исследования как однолинейных, так и многолинейных систем с повторными вызовами различной конфигурации.

Разработанные методы, их модификации и алгоритмы позволяют выполнять анализ широкого класса систем с повторными вызовами, который является важным разделом теории массового обслуживания.

Результаты диссертационных исследований, в том числе конкретные формулы расчета параметров предлагаемых аппроксимаций могут быть использованы при анализе функционирования реальных потоков и телекоммуникационных систем, адекватными математическими моделями которых являются потоки с произвольным объемом поступаемых требований и системы массового обслуживания с повторными вызовами.

Предложенные RQ-системы могут быть применены при проектировании сетей нового поколения для создания новых протоколов случайного множественного доступа и модификации уже существующих.

Найденные основные вероятностные характеристики исследуемых математических моделей реальных потоков и сетей связи позволяют оценить их основные характеристики и дают возможность научно обоснованно выбирать значения параметров сетей и управляющих протоколов доступа, что существенно расширяет возможности решения ряда проблем в области проектирования сетей связи нового поколения.

Разработанный комплекс численного анализа позволяет выполнять расчет параметров вероятностных законов распределений для объема информации, поступившей в потоках с произвольным объемом поступаемых требований и числа заявок в системе.

Указанные результаты успешно применялись при решении ряда практических задач при выполнении НИР с ведущей китайской компанией в области телекоммуникаций.

Положения, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Теоремы о виде допредельных и асимптотических характеристических функций распределения вероятностей объема информации в потоках с произвольным объемом поступаемых требований.

2. Модификации метода асимптотического анализа в предельном условии растущего времени наблюдения на случай непуассоновских потоков событий со случайным объемом требований.

3. Теоремы о виде асимптотических характеристических функций распределения вероятностей числа заявок на орбите в системах с повторными вызовами, представленных в диссертации.

4. Модификации методов асимптотического анализа в предельных условиях большой задержки заявок на орбите, согласованно высокой интенсивности вызывания заявок, согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок.

5. Теоремы о виде асимптотических плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите в однолинейных и многолинейных системах с повторными вызовами различной конфигурации.

6. Метод асимптотически диффузионного анализа, обладающий повышенной точностью, который предназначен для исследования однолинейных и многолинейных систем с повторными вызовами, представленных в диссертации.

7. Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов численного анализа потоков с произвольным объемом поступаемых требований и систем массового обслуживания с повторными вызовами.

Достоверность полученных результатов подтверждается математически корректными формулировками, выводами и доказательствами теорем, представленными в диссертационной работе, согласованностью результатов, полученных для разных моделей и большим количеством компьютерных экспериментов.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Автор лично участвовал в получении всех результатов, представленных в диссертационной работе, а именно в разработке и применении методов исследования потоков событий со случайным объемом требований и RQ-систем различной конфигурации, выводе всех формул, доказательстве всех представленных в диссертации теорем, разработке представленного комплекса проблемно-ориентированных программ и написании алгоритмов построения асимптотических распределений, выполнении численного анализа полученных результатов.

Связь работы с крупными научными проектами. Значительная часть результатов, изложенных в работе получена в рамках выполнения проекта № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи» аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» Федерального агентства по образованию, научно-исследовательской работы № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности в 2014–2015 гг., гранта РФФИ № 18-01-00277 А «Разработка моделей и методов исследования телекоммуникационных систем, управляемых протоколами случайного множественного доступа» и договора с ведущей китайской компанией в области телекоммуникаций на выполнение НИР «Разработка, анализ, тестирование и настройка математических моделей телекоммуникационного трафика типа «свечи», многопоточного поступления требований и многоуровневого управления трафиком».

Публикации. Всего автором опубликовано 87 работ, из них по теме диссертации опубликовано 52 печатные работы, из них 12 статей в журналах, включенных

в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук (в том числе 5 статей в высокорейтинговых зарубежных научных журналах, входящих в Web of Science и Scopus), получены 2 свидетельства о регистрации электронного ресурса, 23 работы опубликованы в трудах Международных и Всероссийских конференций, 21 работа включена в международные базы научного цитирования Scopus и Web of Science.

Апробация работы. Основные результаты работы и отдельные ее положения докладывались и обсуждались на 20 научных конференциях Международного и Всероссийского уровня:

1. XIV Международная конференция им. А. Ф. Терпугова (Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015);
2. XV Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Алтай, 12–16 сентября 2016 г.);
3. 31st European Conference on Modelling and Simulation, (Budapest, Hungary, May 23 – May 26, 2017);
4. Двадцатая международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (г. Москва, 25–29 сентября 2017 г.);
5. XVI Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Казань, 29 сентября – 3 октября 2017 г.);
6. 12th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics (Tomsk, 10 – 15 September 2018);
7. XVII Международная конференция им. А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск 10 – 15 сентября 2018 г.);
8. XXI Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 17 – 21 сентября 2018 г.);
9. XVIII Международная конференция им. А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Саратов 26 – 30 июня 2019 г.);

10. XXII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 23 – 27 сентября 2019 г.);
11. The 25th International Conference on Analytical & Stochastic Modelling Techniques & Applications (Moscow, October 23 — 25, 2019);
12. Международная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 28–30 мая 2020 г.);
13. XXIII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 14 – 18 сентября 2020 г.);
14. Международная конференция «Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики» (Карши, Узбекистан, 25 сентября 2020 г.);
15. Пятая Международная научная конференция по стохастическим методам (Москва, 23 – 27 ноября 2020 г.);
16. XIX Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, 2 – 5 декабря 2020 г.);
17. International Conference on Information Technoligy (Amman, Jordan, 14 – 15 July 2021);
18. XXIV Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 20 – 24 сентября 2021 г.);
19. XX Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, 1 – 5 декабря 2021 г.);
20. The 26th International Conference on Analytical & Stochastic Modelling Techniques & Applications (Tsukuba, Japan, December 13 – 14, 2021).

Диссертация выполнена в рамках основных научных направлений исследований научной школы Томского государственного университета по теории массового обслуживания и теории телетрафика.

Структура работы.

В Главе 1 описаны модели потоков событий различных типов: поток восстановления, ММРР, полумарковский потоки с произвольным объемом поступаемых требований. Показано, что распределение вероятностей объема информации, поступившей в заявках предложенных моделей за время t каждого из рассмотренных

типов, может быть аппроксимировано нормальным распределением. Характеристики полученных распределений представлены в Главе 1.

В Главе 2 представлены математические модели систем с повторными вызовами различной конфигурации, а именно, RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками, ненадежным прибором, тандемные RQ-системы с общей орбитой, многолинейные RQ-системы, аналитическое исследование которых представлено в диссертации. Для распределения вероятностей состояний процессов, описывающих функционирование систем, построены системы дифференциальных уравнений Колмогорова, аналитические предельные решения которых предложены в Главах 3 – 5. Для RQ-систем с ненадежным прибором и вызываемыми заявками получены условия существования стационарного режима при дообслуживании заявок после поломок прибора и обслуживании заново прерванных заявок. При условии обслуживания прерванных заявок заново получены распределения вероятностей состояний прибора и найдена характеристическая функция числа заявок в системе.

В Главе 3 изложены исследования математических моделей RQ-систем различной конфигурации методами асимптотического анализа. RQ-система с ММРР входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками исследована в трех предельных условиях: большой задержки заявок на орбите, согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок. RQ-система с ненадежным прибором и тандемная RQ-система с общей орбитой исследованы в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите. Для представленных моделей на основе полученных асимптотических характеристик системы построены аппроксимации допредельного распределения вероятностей числа заявок на орбите и состояний прибора (приборов).

В Главе 4 представлена разработка метода асимптотически-диффузионного анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите для исследования систем с повторными вызовами различной конфигурации. Для распределения вероятностей числа заявок на орбите в исследуемых системах строится аппроксимация данного распределения. Сам метод асимптотически-диффузионного анализа проводится в три этапа. На первом этапе получено асимптотическое стационарное

распределение вероятностей состояний прибора системы и коэффициента переноса $a(x)$ диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите. При реализации второго этапа асимптотического анализа находится коэффициент диффузии $b(x)$ этого процесса. Применяя полученные функции $a(x)$ и $b(x)$ на третьем этапе реализуется метод асимптотически диффузионного анализа и находится непрерывное предельное распределение, на основе которого строится достаточно точная аппроксимация для допредельного дискретного распределения вероятностей состояний рассматриваемых RQ-систем. Приводятся численные результаты сравнения предлагаемых аппроксимаций и имитационного моделирования рассматриваемых RQ-систем и устанавливается их точность и область применения.

В Главе 5 предложен новый метод исследования многолинейных систем с повторными вызовами двух типов: с гиперэкспоненциальным временем обслуживания и специальным обслуживанием заявок асимптотически диффузионным методом в предельном условии большой задержки заявок на орбите, предложенным в главе 4. Для системы со специальным обслуживанием получено необходимое условие существования стационарного режима.

В результате применения метода асимптотически диффузионного анализа для каждой модели получен диффузионный процесс, плотность распределения вероятностей значений которого используется в качестве аппроксимации для распределения вероятностей числа заявок на орбите и числа занятых приборов в системе.

В Главе 6 представлен численный анализ области применимости асимптотических результатов в допредельной ситуации, полученных в Главах 1–4. Реализованы алгоритмы численного получения аппроксимаций и допредельных распределений для некоторых моделей. Установление области применимости выполнено на основе вычисления расстояния Колмогорова между распределениями вероятностей, построенными на основе асимптотических аппроксимаций и допредельными распределениями, полученными на основе реализации численных алгоритмов или имитационного моделирования.

Глава 1 Потоки событий с произвольным объемом поступающих требований

В данной главе представлен анализ моделей потоков поступления информации. В предложенных моделях в момент наступления события потока поступает случайный объем информации, распределение вероятностей которого будем задавать произвольной функцией распределения вероятностей $V(x)$.

При объемах информации, поступающих в момент наступления события, равных единице, мы получаем модели ординарных потоков событий, исследование которых представлено в работе [34]. При объемах информации, поступающих в момент наступления события, равных значению дискретной целочисленной неотрицательной случайной величины получаем модели неординарных потоков.

В данной главе рассматриваются модели ММРР, потока восстановления и полумарковского потоков и решается задача нахождения распределения вероятностей объема информации, поступившей в заявках этих потоков за определенное время.

1.1 Поток восстановления с произвольным объемом поступающих требований

Рассмотрим поток восстановления, который характеризуется двумя функциями распределения $A_1(x)$ и $A(x)$ – длин первого интервала и интервалов между моментами наступления его событий и функцией распределения $V(x)$ объема информации в одной заявке.

Обозначим $S(t)$ – суммарный объем информации, поступающий за время t в потоке восстановления. Ставится задача нахождения распределения вероятностей значений процесса $S(t)$.

Обозначим $z(t)$ – длину интервала от текущего момента времени t до момента наступления следующего события в потоке восстановления (остаточную длину текущего интервала) и рассмотрим двумерный процесс $\{S(t), z(t)\}$. Данный

процесс является марковским, что позволяет для его исследования применить теории двумерных марковских процессов. Для это рассмотрим функцию

$$P(s, z, t) = P\{S(t) < s, z(t) < z\}$$

и запишем для нее равенство

$$\begin{aligned} P(s, z - \Delta t, t + \Delta t) = \\ = [P(s, z, t) - P(s, \Delta t, t)] + A(z) \int_0^s P(s - x, \Delta t, t) dB(x) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

из которого для распределения вероятностей $P(s, z, t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial P(s, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(s, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s, 0, t)}{\partial z} + A(z) \int_0^s \frac{\partial P(s - x, 0, t)}{\partial z} dB(x), \quad (1.1)$$

здесь $\frac{\partial P(s, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(s, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$.

Введем частичную характеристическую функцию объема информации, поступившей за время t в заявках рассматриваемого потока восстановления в виде

$$H(u, z, t) = \int_0^\infty e^{jus} d_s P(s, z, t).$$

Здесь $j = \sqrt{-1}$. Уравнение (1.1) перепишем для функции $H(u, z, t)$

$$\frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} \{1 - A(z)B^*(u)\}. \quad (1.2)$$

Здесь $\frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$, функция $B^*(u) = \int_0^\infty e^{jux} dB(x)$ – характеристическая

функция объема информации в одной заявке потока восстановления. Начальное условие для этого уравнения имеет вид $H(u, z, 0) = A_1(z)$.

Уравнение (1.2) и начальное условие $H(u, z, 0) = A_1(z)$ перепишем в виде задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} + \{A(z)B^*(u) - 1\} \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z}, \\ H(u, z, 0) = A_1(z), \end{aligned} \quad (1.3)$$

которая будет основной в наших дальнейших исследованиях.

1.1.1 Характеристическая функция объема информации, поступившей за определенное время в потоке восстановления

Характеристическая функция объема информации, поступившей за время t в заявках потока восстановления имеет вид:

$$H(u, t) = H(u, \infty t) = Me^{juS(t)}.$$

Найдя решение $H(u, z, t)$ задачи (1.3), полагая в нем $z \rightarrow \infty$, получим вид характеристической функции объема $S(t)$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1.1 *Характеристическая функция $H(u, t) = Me^{juS(t)}$ объема $S(t)$ определяется равенством*

$$H(u, t) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} A_1^*(\tau) \frac{1 - B^*(u)}{1 - B^*(u)A^*(\tau)} d\tau. \quad (1.4)$$

Здесь $A^*(\tau) = \int_0^{\infty} e^{j\tau t} dA(t)$, $A_1^*(\tau) = \int_0^{\infty} e^{j\tau t} dA_1(t)$ – характеристические функции от функций $A(x)$ и $A_1(x)$ соответственно.

Доказательство. Решим уравнение задачи (1.3). Для этого запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dH(u, z, t)}{\{A(z)B^*(u) - 1\} \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z}}.$$

Введем обозначения $H_z'(u, 0, t) = \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z}$. Первый интеграл последней системы имеет вид $t + z = C$. Найдём другой первый интеграл, получим

$$dH(u, z, t) = \{A(C - t)B^*(u) - 1\} H_z'(u, 0, t) dt. \text{ Имеем}$$

$$H(u, z, t) = \Phi(t + z) + \int_0^t \{A(t + z - x)B^*(u) - 1\} H_z'(u, 0, x) dx,$$

здесь значения функции $\Phi(y)$ найдём из начального условия

$$H(u, z, 0) = A_1(z) = \Phi(z),$$

тогда

$$H(u, z, t) = A_1(t+z) + \int_0^t \{A(t+z-x)B^*(u) - 1\} H'_z(u, 0, x) dx. \quad (1.5)$$

Последнее равенство продифференцируем по z

$$\frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} = (A_1(t+z))'_z + \int_0^t A'_z(t+z-x)B^*(u)H'_z(u, 0, x) dx.$$

Положим $z = 0$, получим для $H'_z(u, 0, t)$ интегральное уравнение

$$H'_z(u, 0, t) = A'_1(t) + B^*(u) \int_0^t A'(t-x)H'_z(u, 0, x) dx,$$

которое для функции $H'_z(u, 0, t)$ является интегральным уравнением в свертках.

Найдем его решение, применив преобразование Фурье. Обозначив

$$H'_z{}^*(u, 0, t) = \int_0^\infty e^{j\tau t} H'_z(u, 0, t) dt, \quad A^*(\tau) = \int_0^\infty e^{j\tau t} dA(t), \quad A_1^*(\tau) = \int_0^\infty e^{j\tau t} dA_1(t),$$

получим

$$H'_z{}^*(u, 0, \tau) = A_1^*(\tau) + A^*(\tau)H'_z{}^*(u, 0, \tau)B^*(u),$$

тогда

$$H'_z{}^*(u, 0, \tau) = \frac{A_1^*(\tau)}{1 - B^*(u)A^*(\tau)}.$$

Возьмем обратное преобразование $H'_z(u, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-j\tau t} H'_z{}^*(u, 0, \tau) d\tau$ от по-

следнего равенства. Найденное выражение для $H'_z(u, 0, t)$ подставим в (1.5), выпол-

нив предельный переход при $z \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} H(u, t) &= H(u, \infty, t) = 1 - (1 - B^*(u)) \int_0^t H'_z(u, 0, x) dx = \\ &= 1 - (1 - B^*(u)) \int_0^t \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-j\tau x} H'_z{}^*(u, 0, \tau) d\tau \right\} dx = \\ &= 1 - (1 - B^*(u)) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \int_0^t e^{-j\tau x} dx \right\} H'_z{}^*(u, 0, \tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} A_1^*(\tau) \frac{1 - B^*(u)}{1 - B^*(u)A^*(\tau)} d\tau.$$

Таким образом получили характеристическую функцию объема $S(t)$ в заявках потока восстановления в виде выражения

$$H(u, t) = Me^{juS(t)} = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} A_1^*(\tau) \frac{1 - B^*(u)}{1 - B^*(u)A^*(\tau)} d\tau, \quad (1.6)$$

совпадающего с (1.4). **Теорема доказана.**

Обратное преобразование Фурье от характеристической функции $H(u, t)$ определяет плотность $f(s, t)$ распределения вероятностей значений объема $S(t)$

$$f(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jus} H(u, t) du. \quad (1.7)$$

Для функции распределения $F(x, t) = P\{S(t) < x\}$ объема $S(t)$ можно записать

$$F(x, t) = \int_0^x f(s, t) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jux}}{ju} H(u, t) du. \quad (1.8)$$

Нахождение значений плотности распределения $f(s, t)$ и функции распределения $F(x, t)$ по формулам (1.7) и (1.8) требует затрат машинного времени, которое не всегда приводит к определенным результатам. При численной реализации (1.7) и (1.8) полезной является следующая модификация равенства (1.4).

Следствие 1.1 *Характеристическую функцию $H(u, t) = Me^{juS(t)}$ объема $S(t)$ можно записать в виде*

$$H(u, t) = 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (B^*(u))^m A_1(t) * [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)], \quad (1.9)$$

здесь $A^{(m)}(t)$ – m -кратная свертка функций распределения $A(t)$, при этом 0-кратная свертка $A^{(0)}(t) \equiv 1$.

Доказательство. В силу равенства (1.4) и суммы геометрической прогрессии можно записать

$$H(u, t) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} A_1^*(\tau) (1 - B^*(u)) \sum_{m=0}^{\infty} (A^*(\tau))^m (B^*(u))^m d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} A_1^*(\tau) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (A^*(\tau))^m (B^*(u))^m - \sum_{m=1}^{\infty} (A^*(\tau))^{m-1} (B^*(u))^m \right) d\tau = \\
&= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} A_1^*(\tau) d\tau + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} \sum_{m=1}^{\infty} A_1^*(\tau) (B^*(u))^m \left((A^*(\tau))^{m-1} - (A^*(\tau))^m \right) d\tau = \\
&= 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (B^*(u))^m A_1(t) [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)],
\end{aligned}$$

что совпадает с (1.9). **Следствие доказано.**

Следствие 1.2 *Функция распределения $F(x, t) = P\{S(t) < x\}$ объема $S(t)$ имеет вид*

$$F(x, t) = 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_1(t) [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)] B^{(m)}(x), \quad (1.10)$$

здесь $B^{(m)}(t)$ – m -кратная свертка функций распределения $B(x)$.

Доказательство. Подставляя (1.9) в (1.8), получим равенство

$$\begin{aligned}
F(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jux}}{ju} \left\{ 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (B^*(u))^m A_1(t) [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)] \right\} du = \\
&= 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_1(t) [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jux}}{ju} (B^*(u))^m du = \\
&= 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_1(t) [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)] B^{(m)}(x),
\end{aligned}$$

которое совпадает с (1.10). **Следствие доказано.**

В равенствах (1.4), (1.9) и (1.10) записаны явные выражения для характеристической функции и функции распределения объема $S(t)$.

Математическое ожидание объема информации, поступившей в заявках потока восстановления за определенное время. Вернемся к уравнению задачи (1.3)

$$\frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} \{A(z)B^*(u) - 1\}, \quad (1.11)$$

в котором устремим $z \rightarrow \infty$, обозначив $H(u, t) = H(u, \infty t)$, получим дополнительное уравнение, которое нам потребуется ниже

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} \{B^*(u) - 1\}.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} \{A(z)B^*(u) - 1\}, \\ \frac{\partial H(u, t)}{\partial t} &= \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} \{B^*(u) - 1\}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

в предельном условии растущего времени наблюдения за потоком. Для начала найдем стационарное распределение вероятностей процесса $z(t)$.

Лемма 1.1 *Стационарное распределение вероятностей $R(z)$ процесса $z(t)$ имеет вид:*

$$R(z) = \frac{1}{a_1} \int_0^z \{1 - A(x)\} dx, \quad (1.13)$$

где $A(x)$ – функция распределения длин интервалов между моментами наступления событий в потоке восстановления, a_1 – средняя длина интервала между моментами наступления событий в потоке восстановления.

Доказательство. В силу определения частичной характеристической функции $H(u, z, t) = \int_0^\infty e^{jus} d_s P(s, z, t)$ определим функцию $R(z)$ стационарного распределения вероятностей значений процесса $z(t)$

$$R(z) = H(0, z, t) = \int_0^\infty d_s P(s, z, t). \quad (1.14)$$

полагая в первом уравнении системы (1.12) $u = 0$, учитывая, что функция $H(0, z, t)$ не зависит от t , так как процесс $z(t)$ стационарный, получим уравнение для нахождения функции $R(z)$

$$R'(z) = (1 - A(z))R'(0),$$

поэтому $R(z)$ можно записать в виде интеграла:

$$R(z) = R'(0) \int_0^z \{1 - A(x)\} dx. \quad (1.15)$$

Чтобы найти $R'(0)$, рассмотрим (1.15) при $z \rightarrow \infty$

$$1 = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = R'(0) \int_0^{\infty} \{1 - A(x)\} dx = R'(0) \cdot a_1,$$

тогда имеем

$$R'(0) = \frac{1}{a_1}, \quad (1.16)$$

где a_1 – средняя длина интервала между моментами наступления событий в потоке восстановления. Полученное выражение (1.16) подставим в (1.15), имеем

$$R(z) = \frac{1}{a_1} \int_0^z \{1 - A(x)\} dx. \quad (1.17)$$

Данное равенство (1.17) совпадает с (1.13). **Лемма доказана.**

Лемма 1.2 Математическое ожидание объема $S(t)$ информации, поступивших в заявках потока восстановления за время t определяется равенством

$$MS(t) = \kappa_1 t = \frac{b_1}{a_1} t, \quad (1.18)$$

обозначив

$$\frac{b_1}{a_1} = \kappa_1.$$

Здесь величина b_1 – средний объем информации, поступившей в одной заявке.

Доказательство. Характеристическая функция $H(u, t)$ является решением задачи Коши (1.3). Дифференцируя по u в нуле задачу (1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(u, z, t)}{\partial t \partial u} - \frac{\partial^2 H(u, z, t)}{\partial z \partial u} &= \frac{\partial^2 H(u, 0, t)}{\partial z \partial u} \{A(z)B^*(u) - 1\} + \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} A(z)B^{*'}(u), \\ \frac{\partial H(u, z, 0)}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

для функций $j m_1(z, t) = \left. \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial u} \right|_{u=0}$, получим систему:

$$\frac{\partial m_1(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial m_1(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial m_1(0, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + b_1 R'(0) A(z),$$

$$m_1(z, 0) = 0.$$

В последней системе устремим $z \rightarrow \infty$, получим уравнение, которое определяет первый начальный момент $m_1(t) = m_1(\infty, t)$ объема информации, поступивших в заявках потока восстановления за время t

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = b_1 R'(0),$$

решая которое, с учетом (1.16), получим выражение для математического ожидания процесса $S(t)$

$$m_1(t) = b_1 R'(0)t = \frac{b_1}{a_1} t = \kappa_1 t. \quad (1.20)$$

Таким образом, получили равенство, которое совпадает с (1.18). **Лемма доказана.**

Асимптотическое распределение вероятностей значений объема информации, поступившей в заявках потока восстановления. Достаточно простое выражение для распределения вероятностей значений объема $S(t)$ получается в предельном условии растущего времени t . Равенство

$$t = \tau T,$$

где $\tau \geq 0$, а T – бесконечно большой параметр, будем называть предельным условием растущего времени, определяющее зависимость времени t от «медленного времени» τ , так как для любого фиксированного значения $\tau > 0$ значение t неограниченно возрастает [34].

Все рассмотренные асимптотики в этой главе будут реализованы в условии растущего времени наблюдения за потоком.

Рассмотрим частичные характеристические функции

$$H_1(u, z, t) = H(u, z, t) e^{-ju\kappa_1 t},$$

то есть $H_1(u, z, t)$ является характеристической функцией центрированного случайного процесса $S(t) - \kappa_1 t$, для которого математическое ожидание равно нулю. В системе (1.12) выполним замену

$$H(u, z, t) = e^{ju\kappa_1 t} H_1(u, z, t). \quad (1.21)$$

Для функции $H_1(u, z, t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1(u, z, t)}{\partial t} + ju\kappa_1 H_1(u, z, t) &= \frac{\partial H_1(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_1(u, 0, t)}{\partial z} \{A(z)B^*(u) - 1\}, \\ \frac{\partial H_1(u, t)}{\partial t} + ju\kappa_1 H_1(u, t) &= \frac{\partial H_1(u, 0, t)}{\partial z} \{B^*(u) - 1\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Обозначим $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$, здесь ε – малый положительный параметр [34], в системе

(1.22) выполним замены

$$t = T\tau = \frac{\tau}{\varepsilon^2}, \quad u = \varepsilon w, \quad H_1(u, z, t) = F_1(w, z, \tau, \varepsilon), \quad (1.23)$$

Первая замена в (1.23) при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяет асимптотическое условие растущего времени наблюдения за потоком, при выполнении которого возрастают не только значения процесса $S(t)$, но также возрастают и значения центрированного процесса $S(t) - \kappa_1 t$. Для компенсации этого возрастания выполняется вторая замена в (1.23) $u = \varepsilon w$, которая эквивалентна рассмотрению класса процессов

$$\varepsilon \{S(t) - \kappa_1 t\} = \varepsilon \left(S\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) - \kappa_1 \frac{\tau}{\varepsilon^2} \right),$$

для которых ниже будет показана сходимость по распределению при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим, что асимптотика второго порядка рассматриваемого метода асимптотического анализа аналогична центральной предельной теореме теории вероятностей.

Получим систему

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_1(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w \frac{b_1}{a_1} F_1(w, z, \tau, \varepsilon) &= \\ = \frac{\partial F_1(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \{1 - A(z)B^*(\varepsilon w)\}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_1(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w \frac{b_1}{a_1} F_1(w, \tau, \varepsilon) &= \frac{\partial F_1(w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \{B^*(\varepsilon w) - 1\}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Решение $F_1(w, z, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, z, \tau, \varepsilon) = F_1(w, z, \tau)$ и ее производных по τ и по z

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_1(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_1(w, z, \tau)}{\partial \tau}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_1(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial F_1(w, z, \tau)}{\partial z},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_1(w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial F_1(w, 0, \tau)}{\partial z}.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.2 *Асимптотическое решение $F_1(w, z, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, z, \tau, \varepsilon)$ системы (1.24) в предельном условии растущего времени наблюдения имеет вид*

$$F_1(w, z, \tau) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\}, \quad (1.25)$$

где функция $R(z)$ – функция стационарного распределения вероятностей значений процесса $z(t)$, которая определена в Лемме 1.1 равенством (1.13), а величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{a_1^2 (b_2 - b_1^2) + b_1^2 (a_2 - a_1^2)}{a_1^3}. \quad (1.26)$$

Здесь a_1, a_2, b_1, b_2 – первые и вторые моменты функций распределения вероятностей $A(x)$ и $B(x)$ соответственно.

Доказательство. Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в первом уравнении системы (1.24) и получим уравнение, которое имеет такой же вид, как и уравнение для нахождения функции $R(z)$ из леммы 1.1

$$R'(z) = (1 - A(z))R'(0),$$

Тогда функция $F_1(w, z, \tau)$ может быть представлена в виде:

$$F_1(w, z, \tau) = R(z)\Phi(w, \tau), \quad (1.27)$$

где $\Phi(w, \tau)$ – некоторая функция, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(w, 0) = 1$.

Решение $F_1(w, z, \tau, \varepsilon)$ первого уравнения системы (1.24) запишем в виде разложения:

$$F_1(w, z, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{R(z) + j\varepsilon w f(z)\} + O(\varepsilon^2), \quad (1.28)$$

$f(z)$ – некоторая функция от переменной z , тогда, подставляя это выражение в первое уравнение системы (1.24), получим:

$$j\varepsilon w \frac{b_1}{a_1} R(z) = R'(z) + j\varepsilon w f'(z) - R'(0) \{1 - A(z)(1 + j\varepsilon w b_1)\} - \\ - j\varepsilon w f'(0) \{1 - A(z)\} + O(\varepsilon^2).$$

Последнее равенство при $\varepsilon \rightarrow 0$ перепишем в виде:

$$f'(z) - f'(0) \{1 - A(z)\} = \frac{b_1}{a_1} [R(z) - A(z)]. \quad (1.29)$$

Общее решение $f(z)$ этого дифференциального уравнения запишем в виде суммы

$$f(z) = CR(z) + g(z), \quad (1.30)$$

где $g(z)$ – частное решение неоднородного уравнения (1.29), а $CR(z)$ – общее решение однородного уравнения. Здесь C – произвольная константа. Решение (1.30) подставим в (1.29), получим уравнение для функции $g(z)$:

$$g'(z) - g'(0) \{1 - A(z)\} = \frac{b_1}{a_1} [R(z) - A(z)]. \quad (1.31)$$

Так как $g(z)$ в силу (1.30) является частным решением уравнения (1.29), то будем полагать, что оно удовлетворяет дополнительному условию $g(\infty) = 0$. В уравнении (1.31) перейдем к пределу при $z \rightarrow \infty$, получим:

$$g(\infty) = g'(0) \int_0^{\infty} \{1 - A(z)\} dz - \frac{b_1}{a_1} \int_0^{\infty} (A(z) - R(z)) dz.$$

Учитывая дополнительное условие $g(\infty) = 0$, из последнего равенства запишем:

$$g'(0) = \frac{b_1}{a_1^2} \int_0^{\infty} (1 - R(z) - (1 - A(z))) dz = \frac{b_1}{a_1^2} \left(\frac{a_2}{2a_1} - a_1 \right) = \frac{b_1}{a_1^2} \cdot \frac{a_2 - 2a_1^2}{2a_1}. \quad (1.32)$$

Здесь a_2 – второй начальный момент функции распределения $A(x)$.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (1.24), в которое подставим разложение (1.28), обозначив $f(\infty) = f$, получим равенство:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w \frac{b_1}{a_1} \Phi(w, \tau) \{1 + j\varepsilon w f\} = \\ & = \Phi(w, \tau) \left\{ R'(0) \left[j\varepsilon w b_1 + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} b_2 \right] - j\varepsilon w f'(0) (-j\varepsilon w b_1) \right\} + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \frac{b_1}{a_1} \Phi(w, \tau) f = \Phi(w, \tau) \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \frac{b_2}{a_1} + (jw)^2 b_1 f'(0) \right\}.$$

Здесь в силу (1.20) и (1.30) можно записать:

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \frac{b_1}{a_1} \Phi(w, \tau) C = \Phi(w, \tau) \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \frac{b_2}{a_1} + (jw)^2 b_1 \left[C \frac{1}{a_1} + g'(0) \right] \right\},$$

откуда получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi(w, \tau)$:

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \Phi(w, \tau) \frac{(jw)^2}{2} \left\{ \frac{b_2}{a_1} + 2b_1 g'(0) \right\}.$$

Учитывая (1.32), введем обозначение

$$\kappa_2 = \frac{b_2}{a_1} + \frac{b_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{a_2 - 2a_1^2}{a_1} = \frac{a_1^2 (b_2 - b_1^2) + b_1^2 (a_2 - a_1^2)}{a_1^3}, \quad (1.33)$$

равенство (1.33) совпадает с (1.26). Тогда получим

$$\Phi(w, \tau) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\}.$$

Отсюда в силу (1.27) имеем (1.25). **Теорема доказана.**

Возвращаясь к функции $H(u, z, t)$, в силу замен (1.21) и (1.23) можно записать $w = \frac{u}{\varepsilon}$, $\tau = \varepsilon^2 t$, поэтому для функции $H(u, z, t)$ получим приближенное равенство

$$H(u, z, t) \approx R(z) \exp \left\{ ju \kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\}.$$

Обозначим характеристическую функцию $h(u, t) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(u, z, t)$ объема $S(t)$ информации, поступившей в заявках потока восстановления. Получим при достаточно больших t характеристическую функцию

$$h(u, t) = \exp \left\{ ju\kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\}.$$

Найденное предельное распределение вероятностей позволяет предложить гауссовскую аппроксимацию с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$ для функции распределения $F(x, t) = P\{S(t) < x\}$ объемов $S(t)$ информации, поступивших в заявках потока восстановления. Отметим тот факт, что математическое ожидание $\kappa_1 t$ объема информации, поступившей в заявках потока восстановления за определенное время найдено допредельно.

1.2 ММРР-поток с произвольным объемом поступаемых требований

ММРР является частным случаем МАР, который имеет широкое применение для моделирования потокового трафика информации в спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетях связи. Это один из видов коррелированных потоков событий. Основные вопросы применения и анализа МАР-потоков представлены в [65, 66].

В работе [39] представлены два эквивалентных способа задания МАР: классический способ задания МАР-потока, согласно определению Д. Лукантони и М. Ньютса, и эквивалентный способ задания МАР-потока, который предложил Кокс. В научных публикация томской школы по теории массового обслуживания применяется эквивалентный способ задания МАР-потока и его частных случаев [35, 36].

Рассмотрим ММРР-поток, заданный генератором $\mathbf{Q} = [q_{vm}]$ инфинитезимальных характеристик цепи Маркова $m(t) = 0, 1, \dots, M$ с непрерывным временем, управляющей потоком; диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_m наступления событий в m -ом состоянии ММРР-потока, когда его управляющая

цепь $m(t)$ принимает значение $m = \overline{0, M}$. Процесс $m(t)$ называется управляющей цепью Маркова для рассматриваемого ММРР-потока. Состояния управляющего процесса $m(t)$ также будем называть состояниями ММРР-потока.

В момент наступления события потока поступает случайный объем информации, распределение вероятностей которого задан функцией распределения $B(x)$ объема информации в каждой заявке ММРР-потока.

Обозначим $S(t)$ – суммарный объем информации, поступившей за время t в заявках ММРР-потока. Ставится задача исследования суммарного объема $S(t)$.

Обозначим распределение вероятностей

$$P_m(s, t) = P\{m(t) = m, S(t) < s\}, \quad m = \overline{0, M}. \quad (1.34)$$

Двумерный случайный процесс $\{m(t), S(t)\}$ является марковским, что позволяет для распределения вероятностей (1.34) получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P_m(s, t)}{\partial t} = -\lambda_m P_m(s, t) + \lambda_m \int_0^s P_m(s-x, t) dB(x) + \sum_{v=0}^M P_v(s, t) q_{vm}. \quad (1.35)$$

Введем частичные характеристические функции:

$$H_m(u, t) = \int_0^\infty e^{jus} d_s P_m(s, t), \quad m = \overline{0, M}.$$

Систему (1.35) перепишем в виде:

$$\frac{\partial H_m(u, t)}{\partial t} = \lambda_m (B^*(u) - 1) H_m(u, t) + \sum_{v=0}^M H_v(u, t) q_{vm}. \quad (1.36)$$

Здесь $B^*(u) = \int_0^\infty e^{jux} dB(x)$ – характеристическая функция объема информации в одной заявке ММРР-потока. Обозначим вектор-строку

$$\mathbf{H}(u, t) = \{H_1(u, t), H_2(u, t), \dots\},$$

тогда систему уравнений (1.35) перепишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) \left\{ \mathbf{Q} + (B^*(u) - 1) \mathbf{\Lambda} \right\}. \quad (1.37)$$

Обозначив

$$\mathbf{H}(0, t) = \mathbf{r}, \quad (1.38)$$

где \mathbf{r} – вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений марковского процесса $m(t)$, из (1.37) при $u = 0$ получим систему уравнений, которая совместно с условием нормировки однозначно определяют вектор \mathbf{r}

$$\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{r}\mathbf{e} = 1. \quad (1.39)$$

Здесь \mathbf{e} – единичный вектор столбец. Получим задачу Коши в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u, t) \left\{ \mathbf{Q} + (B^*(u) - 1)\mathbf{\Lambda} \right\}, \\ \mathbf{H}(0, t) &= \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

решение которой, применяя метод матричной экспоненты, запишем в виде:

$$\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ \left[\mathbf{Q} + (B^*(u) - 1)\mathbf{\Lambda} \right] t \right\}.$$

Из двумерного распределения, определяемого векторной характеристической функцией $\mathbf{H}(u, t)$, применяя условие согласованности, получим одномерное распределение в виде скалярной характеристической функции

$$\mathbf{H}(u, t)\mathbf{e} = M e^{juS(t)} = \mathbf{r} \exp \left\{ \left[\mathbf{Q} + (B^*(u) - 1)\mathbf{\Lambda} \right] t \right\} \mathbf{e}. \quad (1.41)$$

Обратное преобразование Фурье вида:

$$F(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jus}}{ju} \mathbf{H}(u, t)\mathbf{e} du,$$

однозначно определяет функцию распределения $F(s, t) = P\{S(t) < s\}$ суммарного объема $S(t)$ информации, поступившей за время t в заявках ММРР-потока.

Нахождение значений функции распределения $F(x, t)$ требует затрат машинного времени, которое не всегда приводит к определенным результатам. Поэтому получим простое выражение для распределения вероятностей значений объема $S(t)$ информации, поступившей за время t в заявках ММРР-потока.

Умножив матричное уравнение (1.37) на единичный вектор-столбец \mathbf{e} , получим систему

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) \left\{ \mathbf{Q} + (B^*(u) - 1)\mathbf{\Lambda} \right\},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} = \mathbf{H}(u, t) (B^*(u) - 1) \Lambda \mathbf{e}, \quad (1.42)$$

которая будет основной в дальнейших исследованиях. Для начала найдем математическое ожидание объема $S(t)$ информации, поступивших в заявках ММРР-потока.

Лемма 1.3 *Математическое ожидание объема $S(t)$ информации, поступивших в заявках ММРР-потока за время t определяется равенством*

$$MS(t) = b_1 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e} t = \kappa_1 t. \quad (1.43)$$

b_1 – первый момент функции распределения вероятностей $B(x)$, величина $\kappa_1 = b_1 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e}$.

Доказательство. Векторная характеристическая функция $\mathbf{H}(u, t)$ является решением задачи Коши (1.40), где вектор \mathbf{r} является решением системы (1.39). Дифференцируя по u в нуле равенства задачи (1.40) для векторного момента $\mathbf{m}_1(t)$, получим задачу:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}'_1(t) &= \mathbf{m}_1(t) \mathbf{Q} + b_1 \mathbf{r} \Lambda, \\ \mathbf{m}_1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Скалярный момент первого порядка $\mathbf{m}_1(t) \mathbf{e}$, то в силу (1.44) получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}_1(t) \mathbf{e})' &= b_1 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e}, \\ \mathbf{m}_1(0) \mathbf{e} &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\mathbf{m}_1(t) \mathbf{e} = b_1 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e} t = \kappa_1 t. \quad (1.45)$$

Таким образом, получили равенство (1.43). **Лемма доказана.**

Асимптотический анализ объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока в предельном условии растущего времени наблюдения. Рассмотрим систему (1.42) в предельном условии растущего времени наблюдения за потоком, которое характеризуется заменой $t = \tau T$, где T – неограниченно возрастающий параметр.

В системе (1.42) выполним замену

$$\mathbf{H}(u, t) = e^{ju\kappa_1 t} \mathbf{H}^{(1)}(u, t). \quad (1.46)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + ju\kappa_1 \mathbf{H}^{(1)}(u, t) &= \mathbf{H}^{(1)}(u, t) \left\{ \mathbf{Q} + (B^*(u) - 1) \mathbf{\Lambda} \right\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} + ju\kappa_1 \mathbf{H}^{(1)}(u, t) \mathbf{e} &= \mathbf{H}^{(1)}(u, t) (B^*(u) - 1) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Обозначим $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$, в системе (1.47) выполним замены

$$\tau = \varepsilon^2 t, u = \varepsilon w, \mathbf{H}^{(1)}(u, t) = \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \quad (1.48)$$

получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w \kappa_1 \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \left\{ \mathbf{Q} + (B^*(\varepsilon w) - 1) \mathbf{\Lambda} \right\}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} + j\varepsilon w \kappa_1 \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) (B^*(\varepsilon w) - 1) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Решение $\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе вектор-функций, для которых существует конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau)$ и производной по τ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau)}{\partial \tau}.$$

Теорема 1.3 Асимптотическое решение $\mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)$ системы (1.49) в предельном условии растущего времени наблюдения имеет вид

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\}, \quad (1.50)$$

где вектор \mathbf{r} является решением системы уравнений (1.39), а величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = 2b_1 \mathbf{g} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + b_2 \mathbf{r} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}. \quad (1.51)$$

Здесь вектор-строка \mathbf{g} является решением системы уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \mathbf{Q} &= \mathbf{r} (\kappa_1 \mathbf{I} - b_1 \mathbf{\Lambda}), \\ \mathbf{g} \mathbf{e} &= 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, b_1, b_2 – первый и второй моменты функции распределения вероятностей $V(x)$.

Доказательство. Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в первом уравнении системы (1.49), учитывая, что $V^*(0) = 1$, получим матричное уравнение:

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau)\mathbf{Q} = 0,$$

которое имеет такой же вид, как и уравнение для нахождения вектора \mathbf{r} , тогда вектор $\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau)$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau) = \Phi(w, \tau)\mathbf{r}, \quad (1.53)$$

где $\Phi(w, \tau)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию $\Phi(w, 0) = 1$.

Решение $\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)$ первого уравнения системы (1.49) запишем в виде разложения:

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau)\{\mathbf{r} + j\varepsilon w\mathbf{f}\} + O(\varepsilon^2), \quad (1.54)$$

где \mathbf{f} – некоторый вектор. Подставив разложение (1.54) в первое уравнение системы (1.49), имеем

$$j\varepsilon w\kappa_1\mathbf{r} = \mathbf{r}\{\mathbf{Q} + j\varepsilon w b_1\mathbf{\Lambda}\} + j\varepsilon w\mathbf{f}\mathbf{Q} + O(\varepsilon^2).$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\mathbf{f}\mathbf{Q} = \mathbf{r}(\kappa_1\mathbf{I} - b_1\mathbf{\Lambda}), \quad (1.55)$$

Общее решение \mathbf{f} этого уравнения запишем в виде суммы

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{g}, \quad (1.56)$$

здесь вектор-строка \mathbf{g} – частное решение неоднородной системы, $\mathbf{C}\mathbf{r}$ – общее решение однородной системы $\mathbf{f}\mathbf{Q} = 0$, где \mathbf{C} – некоторая константа. Решение (1.56) подставим в (1.55), получим уравнение для вектор-строки \mathbf{g} :

$$\mathbf{g}\mathbf{Q} = \mathbf{r}(\kappa_1\mathbf{I} - b_1\mathbf{\Lambda}). \quad (1.57)$$

Будем полагать, что решение матричного уравнения (1.57) удовлетворяет дополнительному условию $\mathbf{g}\mathbf{e} = 0$. Таким образом, вектор \mathbf{g} определяется системой

$$\begin{aligned} \mathbf{g}\mathbf{Q} &= \mathbf{r}(\kappa_1\mathbf{I} - b_1\mathbf{\Lambda}), \\ \mathbf{g}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Система (1.58) совпадает с (1.49).

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (1.49), в которое подставим разложение (1.54), получим равенство:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w \kappa_1 \Phi(w, \tau) \{1 + j\varepsilon w \mathbf{f}\} = \\ = \Phi(w, \tau) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \} \left(j\varepsilon w b_1 + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} b_2 \right) \Lambda \mathbf{e} + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

тогда, в результате несложных преобразований, получим следующее дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(w, t)$:

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \kappa_1 \Phi(w, \tau) \mathbf{f} \mathbf{e} = \Phi(w, \tau) \left((jw)^2 b_1 \mathbf{f} + \frac{(jw)^2}{2} b_2 \mathbf{r} \right) \Lambda \mathbf{e},$$

откуда получим

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \kappa_1 \Phi(w, \tau) \mathbf{f} \mathbf{e} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) (2b_1 \mathbf{f} \Lambda \mathbf{e} + b_2 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e}). \quad (1.59)$$

В скалярное уравнение (1.59) подставим решение (1.56), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \kappa_1 \Phi(w, \tau) (\mathbf{C} \mathbf{r} + \mathbf{g}) \mathbf{e} = \\ = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) (2b_1 (\mathbf{C} \mathbf{r} + \mathbf{g}) \Lambda \mathbf{e} + b_2 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e}). \end{aligned}$$

Последнее равенство с учетом равенств (1.45) и $\mathbf{r} \mathbf{e} = 1$, $\mathbf{g} \mathbf{e} = 0$, перепишем в виде:

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) (2b_1 \mathbf{g} \Lambda \mathbf{e} + b_2 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e}).$$

Введем обозначение

$$\kappa_2 = 2b_1 \mathbf{g} \Lambda \mathbf{e} + b_2 \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e}, \quad (1.60)$$

равенство (1.60) совпадает с (1.51). Тогда получим

$$\Phi(w, \tau) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\}.$$

В силу (1.53) получим (1.50). **Теорема доказана.**

Возвращаясь к вектор-функции $\mathbf{H}(u, t)$, в силу замен (1.46) и (1.48) можно записать $w = \frac{u}{\varepsilon}$, $\tau = \varepsilon^2 t$, поэтому для вектора-функции $\mathbf{H}(u, t)$ получим приближенное равенство

$$\mathbf{H}(u, t) \approx \mathbf{r} \exp \left\{ ju\kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\}.$$

Обозначим характеристическую функцию $h(u, t) = \mathbf{H}(u, t)\mathbf{e}$ объема $S(t)$ информации, поступившей в заявках ММРР-потока. Получим предельную при достаточно больших t характеристическую функцию

$$h(u, t) = \exp \left\{ ju\kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\}.$$

Таким образом получили, что распределение вероятностей суммарного объема информации, поступившей за время t в заявках ММРР-потока, можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$, причем математическое ожидание $\kappa_1 t$ найдено допредельно.

1.3 Полумарковский поток с произвольным объемом поступающих требований

Рассмотрим полумарковский поток однородных событий, который задан следующим образом. Пусть задан стационарный двумерный марковский процесс $\{\xi(n), \tau(n)\}$ с дискретным временем n , где $\xi(n)$ – дискретная компонента, $\tau(n)$ – непрерывная компонента, принимающая неотрицательные значения. Будем полагать, что эволюция процесса определяется элементами полумарковской матрицы $\mathbf{A}(x)$, элементы $A_{kv}(x)$ которой имеют вид

$$A_{kv}(x) = P\{\xi(n+1) = v, \tau(n+1) < x \mid \xi(n) = k\}. \quad (1.61)$$

Последовательность моментов времени $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$, определяемая рекуррентным выражением $t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}$ для $n = 0, 1, \dots$, называется полумарковским потоком событий, заданным полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$. Процесс $\xi_n = \xi(t_n)$

называют вложенной в полумарковский поток цепью Маркова. Учтем, что имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\infty), \quad (1.62)$$

где \mathbf{P} – матрица вероятностей переходов вложенной цепи Маркова $\xi(t_n)$ по моментам изменения состояний полумарковского процесса. Состояния полумарковского процесса также будем называть состояниями полумарковского потока.

Обозначим $k(t)$ – полумарковский случайный процесс, значения которого на каждом из интервалов $[t_n, t_{n+1})$, $n = 0, 1, \dots$ постоянны и равны ξ_{n+1} :

$$k(t) = \xi(n + 1), \text{ когда } t_n < t \leq t_{n+1} = t_n + \tau(n+1). \quad (1.63)$$

Обозначим $S(t)$ – суммарный объем информации, поступающий за время t в полумарковском потоке. Ставится задача нахождения распределения вероятностей значений процесса $S(t)$.

Обозначим $z(t)$ – длину интервала от текущего момента времени t до момента наступления следующего события в полумарковском потоке (остаточную длину текущего интервала) и рассмотрим трехмерный процесс $\{k(t), S(t), z(t)\}$.

Трехмерный случайный процесс $\{k(t), S(t), z(t)\}$ является марковским, что позволяет для его исследования применить теории марковских процессов. Для этого рассмотрим функцию

$$P_k(s, z, t) = P\{k(t) = k, S(t) < s, z(t) < z\}$$

и запишем для нее равенство

$$\begin{aligned} P_k(s, z - \Delta t, t + \Delta t) = \\ = [P_k(s, z, t) - P_k(s, \Delta t, t)] + \sum_v^K \int_0^s P_k(s - x, \Delta t, t) dB(x) A_{vk}(z) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

из которого для распределения $P_k(s, z, t)$ получим уравнение:

$$\frac{\partial P_k(s, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P_k(s, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P_k(s, 0, t)}{\partial z} + \sum_v^K \int_0^s \frac{\partial P_k(s - x, 0, t)}{\partial z} dB(x) A_{vk}(z), \quad (1.64)$$

здесь $\frac{\partial P_k(s, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial P_k(s, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$.

Введем частичные характеристические функции:

$$H_k(u, z, t) = \int_0^{\infty} e^{jus} d_s P_k(s, z, t). \quad (1.65)$$

Обозначим векторную характеристическую функцию

$$\mathbf{H}(u, z, t) = \{H_1(u, z, t), H_2(u, z, t), \dots, H_K(u, z, t)\}, \quad (1.66)$$

единичную матрицу \mathbf{I} , единичный вектор столбец \mathbf{e} . Уравнение (1.64) для вектор-функции $\mathbf{H}(u, z, t)$, добавив к нему предельное уравнение при $z \rightarrow \infty$, перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z} \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)B^*(u)\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} &= \{B^*(u) - 1\} \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z} \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

где $B^*(u) = \int_0^{\infty} e^{jux} dB(x)$ – характеристическая функция объема информации в одной

заявке полумарковского потока, вектор $\mathbf{H}(u, t) = \mathbf{H}(u, \infty, t)$. Систему уравнений (1.67) мы будем решать асимптотическим методом.

Определим вектор $\mathbf{R}(z)$, компоненты которого имеют смысл стационарного распределения вероятностей

$$R(k, z) = P\{k(t) = k, z(t) < z\} \quad (1.68)$$

двумерного случайного процесса $\{k(t), z(t)\}$. Докажем лемму.

Лемма 1.4 *Стационарное распределение вероятностей $\mathbf{R}(z)$ двумерного процесса $\{k(t), z(t)\}$ имеет вид:*

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}'(0) \int_0^z (\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) dx. \quad (1.69)$$

Здесь

$$\mathbf{R}'(0) = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}\mathbf{A}_1\mathbf{e}}, \quad (1.70)$$

где \mathbf{r} – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, которое является решением системы:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\mathbf{P}, \quad \mathbf{r}\mathbf{e} = 1, \quad (1.71)$$

где $\mathbf{P} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{A}(z)$ – стохастическая матрица вероятностей переходов вложенной цепи Маркова по моментам изменения состояний полумарковского процесса, матрица \mathbf{A}_1 определяется равенством $\mathbf{A}_1 = \int_0^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)) dx$, $\mathbf{A}(x)$ – полумарковская матрица.

Доказательство. В силу определения частичных характеристических функций $H_k(u, z, t)$, компонента $R(k, s)$ вектора $\mathbf{R}(z)$ определяется равенством

$$R(k, z) = H_k(u, z, t),$$

в котором $H_k(u, z, t)$ не зависит от t в силу стационарности двумерного процесса $\{k(t), z(t)\}$, получим матричное дифференциальное уравнение для вектора $\mathbf{R}(z)$:

$$\mathbf{R}'(z) = \mathbf{R}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)), \quad (1.72)$$

граничное условие, для которого при $z \rightarrow \infty$ в силу равенства (1.62) имеет вид:

$$\mathbf{R}'(0) = \mathbf{R}'(0)\mathbf{P},$$

которое совпадает с уравнением системы (1.71), тогда

$$\mathbf{R}'(0) = C\mathbf{r}, \quad (1.73)$$

где C – некоторая константа, а вектор-строка \mathbf{r} – вектор стационарного распределения вероятностей состояний вложенной цепи Маркова $\xi(n)$. Этот вектор \mathbf{r} является решением уравнения Колмогорова $\mathbf{r}\mathbf{P} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{P} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{A}(z)$ – стохастическая матрица, которая определяет вероятности переходов вложенной цепи Маркова. Таким образом, решение уравнения (1.72) запишем в виде:

$$\mathbf{R}(z) = \int_0^z \mathbf{R}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) dx. \quad (1.74)$$

Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty)$ – стационарное распределение значений полумарковского процесса $k(t)$, тогда при $z \rightarrow \infty$ из (1.74) с учетом (1.73) получаем:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty) = C \int_0^{\infty} \mathbf{r}(\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) dx = C \int_0^{\infty} \mathbf{r}(\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)) dx = C\mathbf{r}\mathbf{A}_1. \quad (1.75)$$

где матрица \mathbf{A}_1 определяется равенством $\mathbf{A}_1 = \int_0^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)) dx$.

Умножая левую и правую части равенства (1.75) на единичный вектор-столбец \mathbf{e} , получим

$$C = \frac{1}{\mathbf{r}\mathbf{A}_1\mathbf{e}}.$$

Подставляя полученное равенство в (1.73), имеем

$$\mathbf{R}'(0) = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}\mathbf{A}_1\mathbf{e}}. \quad (1.76)$$

Равенство (1.76) совпадает с (1.70). **Лемма доказана.**

Лемма 1.5 *Математическое ожидание объема $S(t)$ информации, поступивших в заявках полумарковского потока за время t определяется равенством*

$$MS(t) = \frac{b_1}{\mathbf{r}\mathbf{A}_1\mathbf{e}} t = \kappa_1 t, \quad (1.77)$$

Здесь обозначили

$$\kappa_1 = \frac{b_1}{\mathbf{r}\mathbf{A}_1\mathbf{e}}.$$

Доказательство. Векторная характеристическая функция $\mathbf{H}(u, t)$ является решением системы (1.67). Дифференцируя по u в нуле матричное уравнение системы (1.67)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial t \partial u} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial z \partial u} = \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z \partial u} \{ \mathbf{A}(z) \mathbf{B}^*(u) - 1 \} + \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z} \mathbf{A}(z) \mathbf{B}^{*'}(u), \end{aligned} \quad (1.78)$$

для вектор-функции $j\mathbf{m}_1(z, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial u} \right|_{u=0}$, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{m}_1(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{m}_1(0, t)}{\partial z} (\mathbf{A}(z) - 1) + b_1 R'(0) \mathbf{A}(z).$$

В последней системе устремим $z \rightarrow \infty$, умножим на единичный вектор столбец \mathbf{e} , получим уравнение, которое определяет первый начальный момент

$m_1(t) = m_1(\infty, t)$ е объема информации, поступивших в заявках полумарковского потока за время t

$$\frac{\partial m_1(t)}{\partial t} = b_1 \mathbf{R}'(0) \mathbf{e},$$

решая которое, с учетом (1.76), получим выражение для математического ожидания процесса $S(t)$

$$m_1(t) = b_1 \mathbf{R}'(0) \mathbf{e} t = \frac{b_1}{\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}} t = \kappa_1 t, \quad (1.79)$$

где $\kappa_1 = \frac{b_1}{\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}}$. Таким образом, получили равенство, которое совпадает с (1.77).

Лемма доказана.

1.3.1 Исследование допредельной модели полумарковского потока

Теорема 1.4 *Функция распределение вероятностей объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время t имеет вид*

$$F(x, t) = 1 - C_0 + C_0 B(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot [B(x, n+1) - B(x, n)], \quad (1.80)$$

здесь $B(x, n)$ – n -кратная свертка функции $B(x)$, величины C_n определяется равенством

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) [\mathbf{A}^*(y)]^n \mathbf{e} dy, \quad (1.81)$$

где

$$\mathbf{R}^*(y) = \frac{\kappa_1 \mathbf{r}}{b_1} \cdot \frac{1}{jy} (\mathbf{A}^*(y) - \mathbf{I}). \quad (1.82)$$

Доказательство. Для исследования допредельной модели полумарковского потока рассмотрим первое уравнение системы (1.67). Преобразование Фурье-Стилтьеса

$$\mathbf{k}(u, \alpha, t) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \mathbf{H}(u, z, t), \quad (1.83)$$

вектор-функции $\mathbf{H}(u, z, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{k}(u, \alpha, t)}{\partial t} = -j\alpha \mathbf{k}(u, \alpha, t) - \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z} \{ \mathbf{I} - \mathbf{A}^*(\alpha) \mathbf{B}^*(u) \}. \quad (1.84)$$

и начальному условию

$$\mathbf{k}(u, \alpha, 0) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \mathbf{H}(u, z, 0) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \mathbf{R}(z) = \mathbf{R}^*(\alpha), \quad (1.85)$$

где

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial z} &= e^{j\alpha z} \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\partial \mathbf{H}(u, z, t)}{\partial z} d_z e^{j\alpha z} = \\ &= -\frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, t)}{\partial z} - j\alpha \mathbf{k}(u, \alpha, t), \\ A^*(\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} dA(z). \end{aligned}$$

Решение дифференциально-матричного уравнения (1.84) имеет вид

$$\mathbf{k}(u, \alpha, t) = e^{-j\alpha t} \left\{ \mathbf{R}^*(\alpha) - \int_0^t e^{j\alpha \tau} \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, \tau)}{\partial z} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(\alpha) \mathbf{B}^*(u)) d\tau \right\}. \quad (1.86)$$

Здесь $\mathbf{B}^*(u) = \int_0^{\infty} e^{jux} d\mathbf{B}(x)$.

Устремив t в бесконечность в равенстве (1.86), запишем с одной стороны

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{k}(u, \alpha, t) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z} d_z \mathbf{H}(u, z, \infty) = 0,$$

с другой стороны, из равенства (1.86) имеем

$$0 = \mathbf{R}^*(\alpha) - \int_0^{\infty} e^{j\alpha \tau} \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, \tau)}{\partial z} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(\alpha) \mathbf{B}^*(u)) d\tau.$$

Получим преобразование Фурье по τ от вектор-функции $\frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, \tau)}{\partial z}$

$$\int_0^{\infty} e^{j\alpha \tau} \frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, \tau)}{\partial z} d\tau = \mathbf{R}^*(\alpha) (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(\alpha) \mathbf{B}^*(u))^{-1}.$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, определим

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, 0, \tau)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha\tau} \mathbf{R}^*(y) (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(y) \mathbf{B}^*(u))^{-1} dy.$$

Теперь можно равенство (1.86) записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(u, \alpha, t) = e^{-j\alpha t} \left\{ \mathbf{R}^*(\alpha) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{j\alpha\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jy\tau} \mathbf{R}^*(y) (\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(u) \mathbf{A}^*(y))^{-1} dy (\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(u) \mathbf{A}^*(\alpha)) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Зная, что $\mathbf{H}(u, \infty, t) = \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{k}(u, 0, t)$, $\mathbf{A}^*(0) = \mathbf{P}$, $\mathbf{R}^*(0) = \frac{\kappa_1}{b_1} \mathbf{rA}_1$, получим выраже-

ние для функции $\mathbf{H}(u, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u, t) = \frac{\kappa_1}{b_1} \mathbf{rA}_1 - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t e^{-jy\tau} d\tau \mathbf{R}^*(y) (\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(u) \mathbf{A}^*(y))^{-1} dy (\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(u) \mathbf{P}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u, t) = \frac{\kappa_1}{b_1} \mathbf{rA}_1 - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{jyt}}{jy} \mathbf{R}^*(y) (\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(u) \mathbf{A}^*(y))^{-1} dy (\mathbf{I} - \mathbf{B}^*(u) \mathbf{P}). \end{aligned} \quad (1.87)$$

где функция

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^*(y) &= \int_0^{\infty} e^{jyz} d_z \mathbf{R}(z) = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{rA}_1 \mathbf{e}} \int_0^{\infty} e^{jyz} d_z \int_0^z (\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) dx = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{rA}_1 \mathbf{e}} \int_0^{\infty} e^{jyz} (\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)) dz = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{rA}_1 \mathbf{e}} \cdot \frac{1}{jy} \int_0^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)) d e^{jyz} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{rA}_1 \mathbf{e}} \cdot \frac{1}{jy} \left((\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)) e^{j\alpha z} \Big|_{z=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{jyz} d(\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)) \right) = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{rA}_1 \mathbf{e}} \cdot \frac{1}{jy} (\mathbf{A}^*(y) - \mathbf{I}) = \frac{\kappa_1 \mathbf{r}}{b_1} \cdot \frac{1}{jy} (\mathbf{A}^*(y) - \mathbf{I}). \end{aligned}$$

Подставляя полученное равенство в (1.87), получим

$$\mathbf{H}(u, t) = \frac{\kappa_1}{b_1} \mathbf{rA}_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\kappa_1 \mathbf{r}}{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{jyt}}{y^2} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(y)) (\mathbf{I} - B^*(u) \mathbf{A}^*(y))^{-1} dy (\mathbf{I} - B^*(u) \mathbf{P}). \quad (1.88)$$

Обозначим характеристическую функцию $h(u, t) = \mathbf{H}(u, t) \mathbf{e}$ объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время t , тогда

$$\begin{aligned} h(u, t) &= \frac{\kappa_1}{b_1} \mathbf{r} \mathbf{A}_1 \mathbf{e} - \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\kappa_1 \mathbf{r}}{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{jyt}}{y^2} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(y)) (\mathbf{I} - B^*(u) \mathbf{A}^*(y))^{-1} dy (\mathbf{I} - B^*(u) \mathbf{P}) \mathbf{e} = \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\kappa_1 \mathbf{r} (B^*(u) - \mathbf{I})}{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{jyt}}{y^2} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(y)) (\mathbf{I} - B^*(u) \mathbf{A}^*(y))^{-1} dy \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Зная, что $h(u, t) = \mathbf{H}(u, t) \mathbf{e} = \int_0^{\infty} e^{jus} P(s, t) ds$, полученное выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned} h(u, t) &= \mathbf{H}(u, t) \mathbf{e} = \int_0^{\infty} e^{jus} P(s, t) ds = \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\kappa_1}{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{jyt}}{y^2} \cdot \mathbf{r} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*(y)) (B^*(u) - \mathbf{I}) (\mathbf{I} - B^*(u) \mathbf{A}^*(y))^{-1} \mathbf{e} dy. \end{aligned}$$

Тогда плотность распределения вероятностей объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время t является обратным преобразованием Фурье по переменной u от характеристической функции $h(u, t) = \mathbf{H}(u, t) \mathbf{e}$ имеет вид

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} h(u, t) du.$$

Для вычисления данного интеграла требуется значительная машинная мощность, поэтому рассмотрим выражение

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} h(u, t) du =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) (1-B^*(u)) (\mathbf{I} - B^*(u)\mathbf{A}^*(y))^{-1} \mathbf{e} dy \right\} du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) (1-B^*(u)) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^{*n}(y) B^{*n}(u) \mathbf{e} dy \right\} du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^{*n}(y) [B^{*n}(u) - B^{*(n+1)}(u)] \mathbf{e} dy \right\} du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} du - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^{*n}(y) [B^{*n}(u) - B^{*(n+1)}(u)] \mathbf{e} dy \right\} du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} du - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \mathbf{e} [1-B^*(u)] dy \right\} du - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^{*n}(y) \mathbf{e} [B^{*n}(u) - B^{*(n+1)}(u)] dy \right\} du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} du - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \mathbf{e} dy \right\} du + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \mathbf{e} B^*(u) dy \right\} du + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^{*n}(y) \mathbf{e} [B^{*(n+1)}(u) - B^{*n}(u)] dy \right\} du = \\
&= \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \mathbf{e} dy \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} du +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \mathbf{e} dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} B^*(u) du + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) \mathbf{A}^{*n}(y) \mathbf{e} dy \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} [B^{*n+1}(u) - B^{*n}(u)] du =
\end{aligned}$$

Обозначим

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jyt}}{jy} \cdot \mathbf{R}^*(y) [\mathbf{A}^*(y)]^n \mathbf{e} dy,$$

где

$$\mathbf{R}^*(y) = \frac{\kappa_1 \mathbf{r}}{b_1} \cdot \frac{1}{jy} (\mathbf{A}^*(y) - \mathbf{I}).$$

Тогда плотность распределение вероятностей определяется равенством

$$\begin{aligned}
P(x, t) &= \{1 - C_0\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} du + C_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} B^*(u) du + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} [B^{*n+1}(u) - B^{*n}(u)] du = \\
& = \{1 - C_0\} \delta(x) + C_0 b(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot [b(x, n+1) - b(x, n)]. \tag{1.89}
\end{aligned}$$

Здесь интеграл $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} du = \delta(x)$ равен дельта-функции, $b(x)$ – плотность распределения объема информации в одной заявке.

Тогда функция распределения объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время t определяется равенством

$$F(x, t) = 1 - C_0 + C_0 B(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot [B(x, n+1) - B(x, n)],$$

которое совпадает с (1.80). Здесь $\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \delta(x) dx = 1$. **Теорема доказана.**

1.3.2 Асимптотическое распределение вероятностей значений объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока в предельном условии растущего времени.

Получим выражение для распределения вероятностей значений объема $S(t)$ в предельном условии растущего времени t . Равенство $t = \tau T$, где $\tau \geq 0$, T – бесконечно большой параметр, будем называть предельным условием растущего времени.

В системе уравнений (1.67) выполним замену

$$\mathbf{H}(u, z, t) = e^{ju\kappa_1 t} \mathbf{H}^{(1)}(u, z, t). \quad (1.90)$$

Подставив это произведение в систему (1.67), для функции $\mathbf{H}^{(1)}(u, z, t)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, z, t)}{\partial t} + ju\kappa_1 \mathbf{H}^{(1)}(u, z, t) &= \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, 0, t)}{\partial z} \{ \mathbf{A}(z) B^*(u) - \mathbf{I} \}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} + ju\kappa_1 \mathbf{H}^{(1)}(u, t) \mathbf{e} &= \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, 0, t)}{\partial z} \{ B^*(u) - 1 \} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Обозначим $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$, в системе (1.91) выполним замены

$$\tau = \frac{t}{T} = \varepsilon^2 t, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}^{(1)}(u, z, t) = \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon), \quad (1.92)$$

получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w \kappa_1 \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon) &= \\ = \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \{ \mathbf{I} - \mathbf{A}(z) B^*(\varepsilon w) \}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} + j\kappa_1 \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{e} &= \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \{ B^*(\varepsilon w) - 1 \} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Решение $\mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе вектор-функций, для которых существуют конечные пределы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau)$ производных по τ и

по z

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau)}{\partial \tau}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau)}{\partial z},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, 0, \tau)}{\partial z}.$$

Теорема 1.5 Асимптотическое решение $\mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)$ системы (1.93) в предельном условии растущего времени наблюдения имеет вид

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau) = \mathbf{R}(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\}, \quad (1.94)$$

где вектор $\mathbf{R}(z)$ определяется равенством (1.74), а величина κ_2 имеет вид

$$\kappa_2 = \frac{b_2}{\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}} + 2b_1 \mathbf{g}'(0) \mathbf{e}. \quad (1.95)$$

Здесь b_1, b_2 – первый и второй моменты функции распределения вероятностей

$V(x)$, матрица \mathbf{A}_1 определяется равенством $\mathbf{A}_1 = \int_0^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)) dx$, вектор $\mathbf{g}'(0)$ явля-

ется решением неоднородной системы уравнений

$$\mathbf{g}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \kappa_1 (\mathbf{r} - \mathbf{R}),$$

$$\mathbf{g}'(0) \mathbf{A}_1 \mathbf{e} = \frac{b_1}{2} \frac{\mathbf{r} \mathbf{A}_2 \mathbf{e}}{(\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \mathbf{e})^2} - b_1. \quad (1.96)$$

Здесь \mathbf{r} – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, для которого выполняются равенства:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} \mathbf{P}, \quad \mathbf{r} \mathbf{e} = 1, \quad (1.97)$$

где $\mathbf{P} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{A}(z)$ – стохастическая матрица вероятностей переходов вложенной цепи Маркова по моментам изменения состояний полумарковского процесса. Мат-

рица \mathbf{A}_2 определяется равенством $\mathbf{A}_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} d\mathbf{A}(x)$.

Вектор \mathbf{R} – вектор стационарного распределения вероятностей значений полумарковского процесса $k(t)$, который определяется равенством

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r} \mathbf{A}_1}{\mathbf{r} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}}. \quad (1.98)$$

Доказательство. Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в первом уравнении системы (1.93), учитывая, что $B^*(0) = 1$, получим уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(w, z, \tau)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}(w, 0, \tau)}{\partial z} \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)\},$$

которое имеет такой же вид, как и уравнение для нахождения вектора $\mathbf{R}(z)$, тогда вектор $\mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau)$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{F}(w, z, \tau) = \Phi(w, \tau) \mathbf{R}(z), \quad (1.99)$$

где $\mathbf{R}(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений двумерного случайного процесса $\{k(t), z(t)\}$, которое определяется равенством (1.74).

Решение $\mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon)$ первого уравнения системы (1.93) запишем в виде разложения:

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, z, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{\mathbf{R}(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}(z)\} + O(\varepsilon^2), \quad (1.100)$$

подставляя это выражение в первое уравнение системы (1.83) и применяя разложение в ряд для $B^*(\varepsilon w)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$, имеем

$$j\varepsilon w \kappa_1 \mathbf{R}(z) = \mathbf{R}'(z) + j\varepsilon w \mathbf{f}'(z) - \mathbf{R}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)(1 + j\varepsilon w b_1)\} - \\ - j\varepsilon w \mathbf{f}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)\} + O(\varepsilon^2).$$

Выполнив несложные преобразования, в силу (1.77), последнее равенство при $\varepsilon \rightarrow 0$ перепишем в виде дифференциального уравнения относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{f}(z)$:

$$\mathbf{f}'(z) - \mathbf{f}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)\} = \kappa_1 [\mathbf{R}(z) - \mathbf{rA}(z)]. \quad (1.101)$$

Общее решение $\mathbf{f}(z)$ этого уравнения запишем в виде суммы

$$\mathbf{f}(z) = C \mathbf{R}(z) + \mathbf{g}(z), \quad (1.102)$$

которое подставим в (1.101), получим уравнение для вектора $\mathbf{g}(z)$:

$$\mathbf{g}'(z) - \mathbf{g}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)\} = \kappa_1 [\mathbf{R}(z) - \mathbf{rA}(z)]. \quad (1.103)$$

Так как $\mathbf{g}(z)$ в силу (1.103) является частным решением уравнения (1.102), то будем полагать, что оно удовлетворяет дополнительному условию $\mathbf{g}(\infty) \mathbf{e} = 0$. В уравнении (1.103) перейдем к пределу при $z \rightarrow \infty$, имеем:

$$\mathbf{g}(\infty) = \int_0^{\infty} \mathbf{g}'(0) \{ \mathbf{I} - \mathbf{A}(z) \} dz - \kappa_1 \int_0^{\infty} (\mathbf{rA}(z) - \mathbf{R}(z)) dz.$$

В силу необходимого условия сходимости несобственного интеграла с монотонно убывающей подынтегральной функцией, можно записать следующее равенство

$$\mathbf{g}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) - \kappa_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = 0, \quad (1.104)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty)$ – вектор стационарного распределения вероятностей значений полумарковского процесса $k(t)$, который определяется равенством:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{rA}_1}{\mathbf{rA}_1\mathbf{e}}. \quad (1.105)$$

Уравнение (1.104) перепишем в виде:

$$\mathbf{g}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \kappa_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}).$$

Данная система имеет бесконечно много решений. Для определения единственного решения $\mathbf{g}'(0)$ применим дополнительное условие, которое получим из равенства:

$$0 = \mathbf{g}(\infty)\mathbf{e} = \int_0^{\infty} \{ \mathbf{g}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) - \kappa_1(\mathbf{rA}(z) - \mathbf{R}(z)) \} dx \mathbf{e}.$$

Так как подынтегральное выражение при $z \rightarrow \infty$ равно нулю

$$\mathbf{g}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) - \kappa_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = 0,$$

то можно записать

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{g}(\infty)\mathbf{e} &= \int_0^{\infty} \{ \mathbf{g}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) + \kappa_1\mathbf{r}(\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)) + \kappa_1(\mathbf{R}(z) - \mathbf{R}) \} dx \mathbf{e} = \\ &= \mathbf{g}'(0) \int_0^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)) dx \mathbf{e} + \kappa_1 \int_0^{\infty} (\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}) dx \mathbf{e} + \kappa_1\mathbf{r} \int_0^{\infty} (\mathbf{P} - \mathbf{A}(x)) dx \mathbf{e} = \\ &= \mathbf{g}'(0)\mathbf{A}_1\mathbf{e} - \kappa_1 \int_0^{\infty} (\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)) dx \mathbf{e} + b_1. \end{aligned}$$

Здесь, в силу (1.72), интеграл

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} (\mathbf{R} - \mathbf{R}(x)) dx = (\mathbf{R} - \mathbf{R}(x))x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x d\mathbf{R}(x) = \\
& = \int_0^{\infty} x \mathbf{R}'(0) (\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) dx = \int_0^{\infty} \mathbf{R}'(0) (\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) d \frac{x^2}{2} = \\
& = \left\{ \mathbf{R}'(0) (\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)) \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathbf{R}'(0) \frac{x^2}{2} d\mathbf{A}(x) \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{R}'(0) \mathbf{A}_2 = \frac{\mathbf{rA}_2}{2\mathbf{rA}_1\mathbf{e}}.
\end{aligned}$$

Здесь матрица \mathbf{A}_2 определяется равенством $\mathbf{A}_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} d\mathbf{A}(x)$. Окончательно

получим систему:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}'(0)(\mathbf{I} - \mathbf{P}) &= \kappa_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \\
\mathbf{g}'(0)\mathbf{A}_1\mathbf{e} &= \frac{b_1}{2} \frac{\mathbf{rA}_2\mathbf{e}}{(\mathbf{rA}_1\mathbf{e})^2} - b_1.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (1.93), в которое подставим разложение (1.100) и разложение для $B^*(\varepsilon w)$ с точностью до $O(\varepsilon^3)$, получим равенство:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w \kappa_1 \Phi(w, \tau) \{1 + j\varepsilon w C\} = \\
& = \Phi(w, \tau) \left\{ \mathbf{R}'(0) \left[j\varepsilon w b_1 + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} b_2 \right] - j\varepsilon w \mathbf{f}'(0) (-j\varepsilon w b_1) \right\} \mathbf{e} + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \kappa_1 \Phi(w, \tau) C = \Phi(w, \tau) \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \mathbf{R}'(0) b_2 + (jw)^2 b_1 \mathbf{f}'(0) \right\} \mathbf{e}.$$

Здесь в силу (1.79) запишем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 \kappa_1 \Phi(w, \tau) C = \\
& = \Phi(w, \tau) \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \mathbf{R}'(0) b_2 + (jw)^2 b_1 [\mathbf{C}\mathbf{R}'(0) + \mathbf{g}'(0)] \right\} \mathbf{e},
\end{aligned}$$

откуда в силу (1.79) получим

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \Phi(w, \tau) \frac{(jw)^2}{2} \left\{ \frac{b_2}{\mathbf{rA}_1 \mathbf{e}} + 2b_1 \mathbf{g}'(0) \mathbf{e} \right\}.$$

Введем обозначение

$$\kappa_2 = \frac{b_2}{\mathbf{rA}_1 \mathbf{e}} + 2b_1 \mathbf{g}'(0) \mathbf{e},$$

которое совпадает с (1.95). Тогда получим

$$\Phi(w, \tau) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\}.$$

Откуда в силу (1.99) получим равенство (1.94). **Теорема доказана.**

Возвращаясь к вектор-функции $\mathbf{H}(u, z, t)$, в силу замен (1.90) и (1.92) можно записать $w = \frac{u}{\varepsilon}$, $\tau = \varepsilon^2 t$, поэтому для вектора-функции $\mathbf{H}(u, z, t)$ получим равенство

$$\mathbf{H}(u, z, t) \approx \mathbf{R}(z) \exp \left\{ ju \kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\}.$$

Обозначим характеристическую функцию $h(u, t) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{H}(u, z, t) \mathbf{e}$ объема $S(t)$ информации, поступившей в заявках полумарковского потока. Получим предельную при достаточно больших t характеристическую функцию

$$h(u, t) = \exp \left\{ ju \kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\}.$$

Найденное предельное распределение вероятностей позволяет предложить гауссовскую аппроксимацию для функции распределения $F(x, t) = P\{S(t) < x\}$ объема $S(t)$ информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время t с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$, причем математическое ожидание $\kappa_1 t$ найдено допредельно.

1.4 Область применимости асимптотических результатов для исследования потоков с произвольным объемом поступающих требований в допредельной ситуации

В данной главе для потока восстановления равенством (1.4) определена допредельная характеристическая функция объема $S(t)$ информации, поступившей в заявках потока за время t . Данная функция с помощью обратного преобразования Фурье определяет распределение вероятностей объема $S(t)$. Равенством (1.9) эта характеристическая функция определена через кратные свертки функций распределений $A(x)$ и $B(x)$. В равенстве (1.10) записано явное выражение функции распределения объема $S(t)$.

Для ММРР-потока определена допредельная характеристическая функция суммарного объема информации $S(t)$, поступившей за время t в заявках потока, которая также, как и для потока восстановления, с помощью обратного преобразования Фурье определяет распределение вероятностей объема $S(t)$. Однако численная реализация полученных формул требует затрат машинного времени и не всегда приводит к желаемому результату.

Для полумарковского потока получены допредельные плотность распределения и функция распределения объема информации $S(t)$, поступившей за время t в заявках потока в виде интегральных формул.

Достаточно простое выражение для распределения вероятностей значений объема $S(t)$ в потоке восстановления, ММРР и полумарковском потоках получается в предельном условии растущего времени t .

Было показано, что распределение вероятностей объема информации, поступившей в заявках предложенных моделей за время t каждого из рассмотренных типов, может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$, где величины κ_1 и κ_2 вычисляются по формулам, которые приведены в Таблице 1.1 (пояснение обозначений можно найти в соответствующих разделах диссертации). Отметим, что для предложенных моделей

получены допредельные математические ожидания $\kappa_1 t$ объема информации, поступившей за время t в заявках каждого потока.

Таблица 1.1 – Формулы для вычисления параметров κ_1 и κ_2 моделей потоков событий

Тип потока	Формула для параметра κ_1	Формула для параметра κ_2
Поток восстановления	$\kappa_1 = \frac{b_1}{a_1}$	$\kappa_2 = \frac{a_1^2(b_2 - b_1^2) + b_1^2(a_2 - a_1^2)}{a_1^3}$
ММРР	$\kappa_1 = b_1 r \Lambda e$	$\kappa_2 = 2b_1 g \Lambda e + b_2 r \Lambda e$
Полумарковский	$\kappa_1 = \frac{b_1}{r A_1 e}$	$\kappa_2 = \frac{b_2}{r A_1 e} + 2b_1 g'(0)e$

Точность полученной аппроксимации будем определять с помощью расстояния Колмогорова. Для вычисления воспользуемся формулой

$$\Delta(t) = \max_{0 \leq x < \infty} |F(x, t) - F_{app}(x, t)|. \quad (1.97)$$

Если расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ принимает значение не более 0.05, то будем говорить, что аппроксимация вполне приемлема, если $\Delta(t) \leq 0.03$, то аппроксимацию будем называть достаточно точной, а если $\Delta(t) \leq 0.01$, то назовем ее сверхточной.

В численных экспериментах для потока восстановления в (1.10) будем полагать $A_1(x) \equiv A(x)$, а функции распределения $A(x)$ и $B(x)$ будем выбирать из класса гамма-распределений, что существенно облегчает нахождение значений m -кратных сверток, так как m -кратная свертка гамма-распределения также является гамма-распределением с тем же параметром масштаба и параметром формы в m раз больше исходного значения параметра гамма распределения.

Положим для $A(x)$ параметр формы $\alpha_1 = 0.5$, параметр масштаба $\beta_1 = \alpha_1$, а для функции $B(x)$ $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = \alpha_2$. В Таблице 1.2 приведены значения расстояний $\Delta(t)$ при указанных значениях времени t .

Таблица 1.2 – Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ между допредельным и асимптотическим распределениями для потока восстановления при различных значениях t

	$t = 7$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 200$
$\Delta(t)$	0.077	0.053	0.030	0.018	0.013	0.009

Значения расстояния $\Delta(t)$, приведенные в этой таблице говорят о достаточно высокой точности предложенной гауссовской аппроксимации. С увеличением значений времени t точность гауссовской аппроксимации естественно повышается в силу предельного условия.

Для предложенной модели ММРР-потока положим $\alpha = 2$, $\beta = \alpha$,

$$B^*(u) = \left(\frac{\beta}{\beta - ju} \right)^\alpha$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.462 & 0 & 0 \\ 0 & 0.925 & 0 \\ 0 & 0 & 1.387 \end{bmatrix}.$$

Решая систему $\mathbf{rQ} = 0$, $\mathbf{re} = 1$, получим

$$\mathbf{r} = \{0.197, 0.444, 0.359\}.$$

Найдя значения κ_1 и κ_2 по формулам (1.43) и (1.51), предварительно решив систему (1.52) запишем гауссовскую функцию распределения $F_N(s, t)$ с параметрами $a = \kappa_1 t$ и $\sigma = \sqrt{\kappa_2 t}$. Для рассматриваемых исходных данных \mathbf{Q} , $\mathbf{\Lambda}$ и $B^*(u)$ значения κ_1 и κ_2 составляют

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = 1.679.$$

Точность аппроксимации гауссовским распределением $F_N(s, t)$ допредельного распределения $F(s, t)$, которое для ММРР-потока в виде обратного преобразования Фурье от характеристической функции (1.41) так же будем оценивать расстоянием Колмогорова $\Delta(t)$ между этими распределениями. В Таблице 1.3 приведены значения величины $\Delta(t)$ для указанных значений t .

Таблица 1.3 – Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ между допредельным и асимптотическим распределениями для ММРР-потока при различных значениях t

	$t = 7$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 200$
$\Delta(t)$	0.053	0.041	0.026	0.016	0.012	0.008

Из приведенных табличных данных получим, что при $t \geq 7$ предлагаемая аппроксимация вполне приемлемая, при $t \geq 20$ предлагаемая гауссовская аппроксимация является достаточно точной, а при $t \geq 100$ – сверхточная. Сравнение графиков асимптотической P_{as} и допредельной P плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время t представлено на рисунках 1.1 – 1.3.

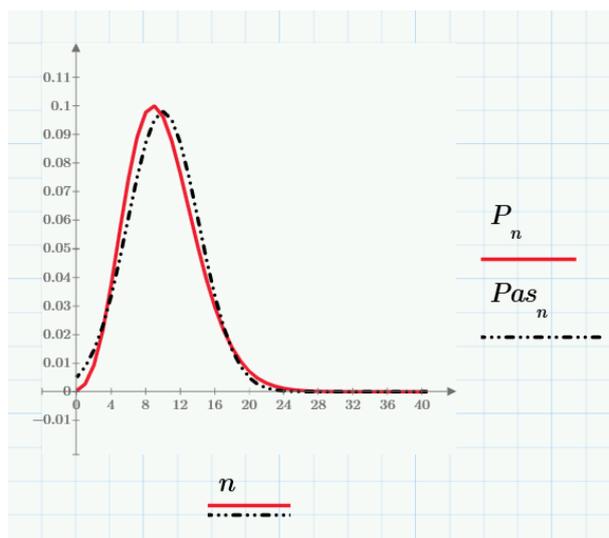


Рисунок 1.1 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 10$ (аппроксимация вполне приемлемая)

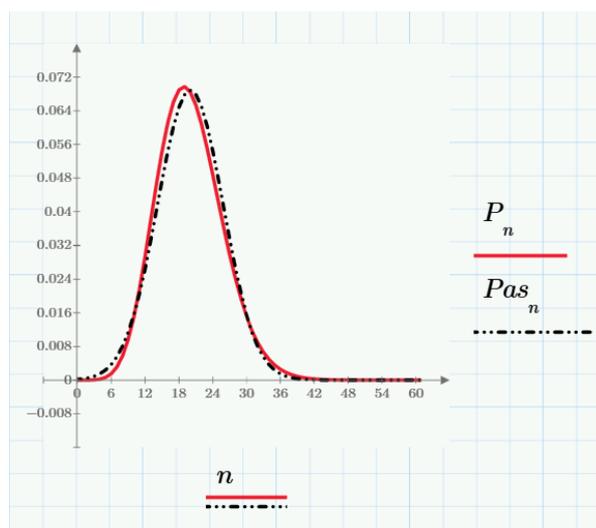


Рисунок 1.2 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 20$ (аппроксимация достаточно точная)

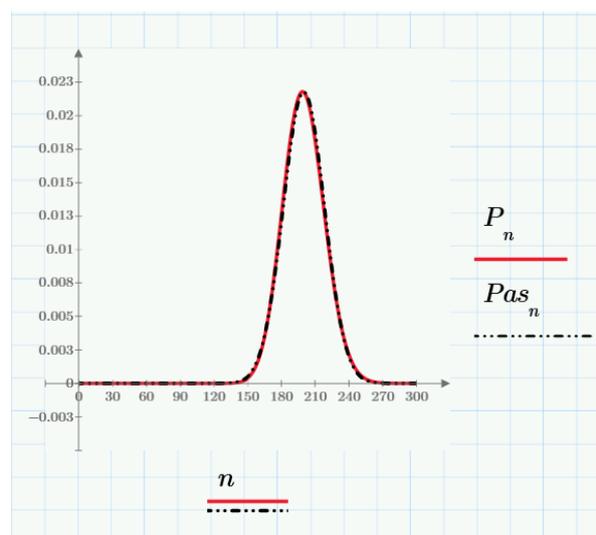


Рисунок 1.3 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 200$ (аппроксимация сверхточная)

Для полумарковского потока полумарковскую матрицу $\mathbf{A}(x)$ определим следующим образом:

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{P} \circ \mathbf{G}(x),$$

где « \circ » – произведение Адамара. Матрица \mathbf{P} – матрица переходов вложенной цепи Маркова $\xi(n)$ и $\mathbf{G}(x)$ – матрица условных функций распределений процесса $\tau(n)$. Матрица \mathbf{P} имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Элементами матрицы $\mathbf{G}(x)$ являются функции гамма-распределения с параметрами формы и масштаба $\alpha_{11} = \beta_{11} = 1$, $\alpha_{12} = \beta_{12} = 2$, $\alpha_{13} = \beta_{13} = 1$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 3$, $\alpha_{22} = \beta_{22} = 1$, $\alpha_{23} = \beta_{23} = 3$, $\alpha_{31} = \beta_{31} = 2$, $\alpha_{32} = \beta_{32} = 1$, $\alpha_{33} = \beta_{33} = 2$. Пусть количество информации в одном пакете также имеет гамма распределение с параметрами формы и масштаба $\alpha = \beta = 2$. Для рассматриваемых исходных данных значения κ_1 и κ_2 составляют $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1.146$. На рисунках 1.4 – 1.6 показана плотность распределения объема информации, поступившей в полумарковском потоке, полученная по формуле (1.89) (сплошная линия) по сравнению с асимптотическим результатом (пунктирная линия) для $t = 10$, $t = 20$, $t = 100$. В Таблице 1.4 представлены расстояния Колмогорова

$$\Delta(t) = \max_{0 \leq x < \infty} |F(x, t) - F_N(x, t)|$$

между допредельным распределением, полученным по интегральной формуле (1.80) и асимптотической функцией распределения с параметрами κ_1 и κ_2 для полумарковского потока.

Таблица 1.4 – Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ между допредельным и асимптотическим распределениями для полумарковского потока при различных значениях t

	$t = 5$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 200$
$\Delta(t)$	0.053	0.031	0.021	0.013	0.009	0.007

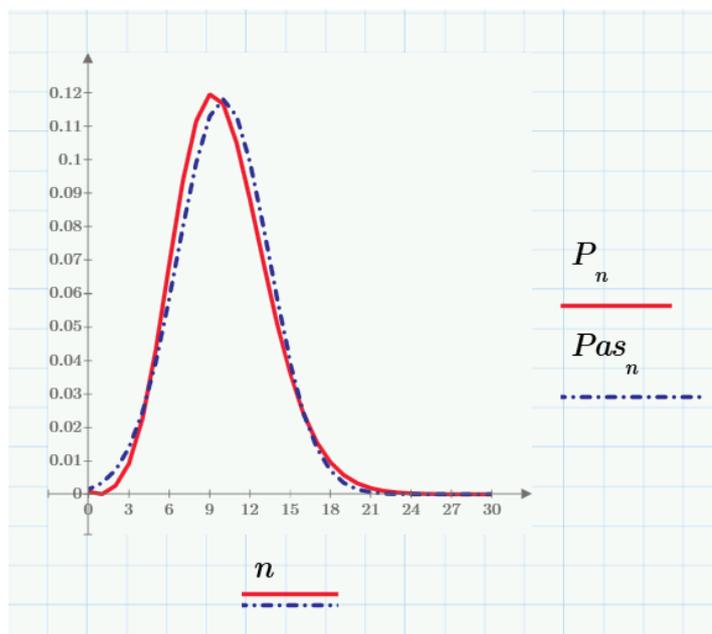


Рисунок 1.4 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 10$ (аппроксимация вполне приемлемая)

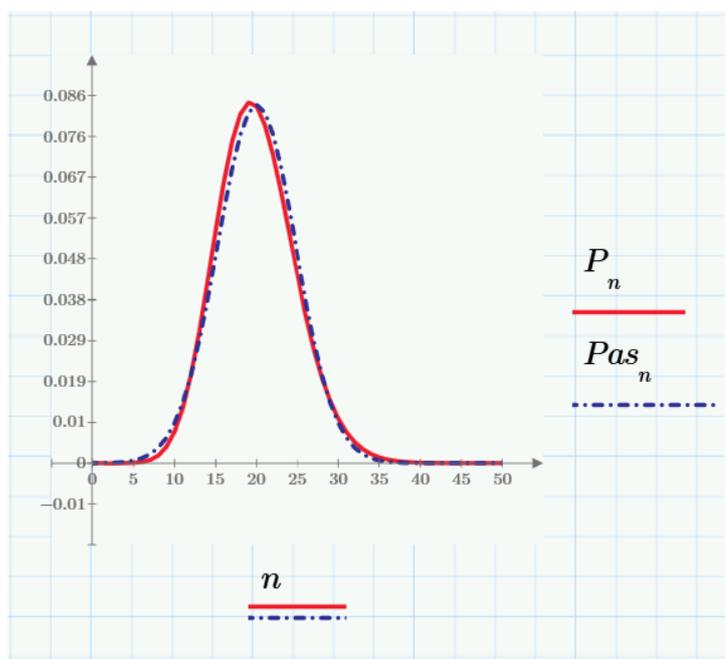


Рисунок 1.5 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 20$ (аппроксимация достаточно точная)

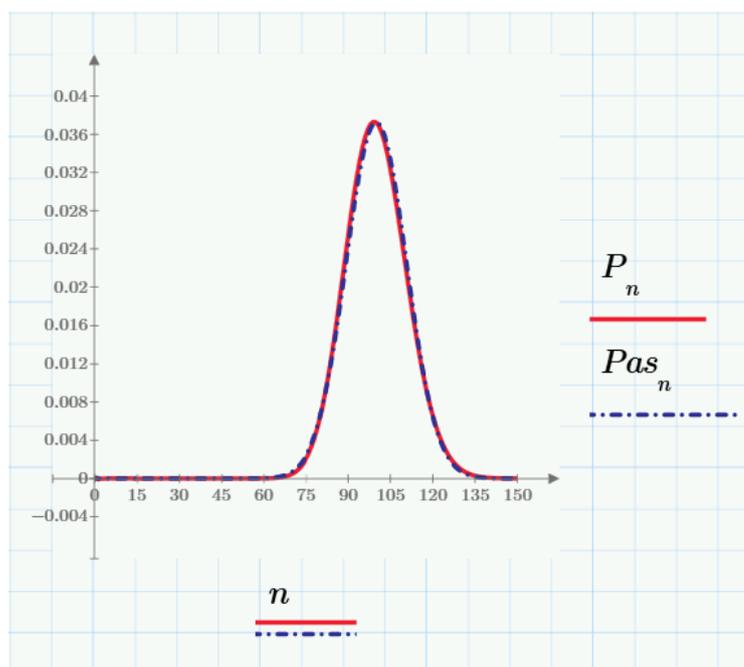


Рисунок 1.6 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 100$ (аппроксимация сверхточная)

Можно сделать вывод о том, что точность аппроксимации повышается с увеличением времени t . Численная реализация формул (1.89) и (1.80) дает наиболее точные результаты, ограниченные лишь возможностями вычислительной техники. При $5 \leq t < 10$ аппроксимация является вполне приемлемой, при $10 \leq t \leq 50$ – достаточно точной и при $t \geq 100$ предлагаемая аппроксимация является сверхточной.

1.5 Резюме

В Главе 1 выполнено исследование потоков событий с произвольным объемом поступаемых требований. Найдено распределение вероятностей суммарного объема, поступившего в потоке за время t . Это распределение найдено, как в допредельной ситуации в виде достаточно сложных выражений, численная реализация которых требует значительных затрат машинного времени, так и в предельном условии растущего времени наблюдения за потоком. Показано, что асимптотическое распределение вероятностей является гауссовским с параметрами $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$, где величины κ_1 и κ_2 определяются несложными выражениями.

В тереме 1.1 для потока восстановления равенством (1.4) определена допредельная характеристическая функция объема $S(t)$ информации, поступившей в заявках потока за время t . Данная функция с помощью обратного преобразования Фурье определяет распределение вероятностей объема $S(t)$. Равенством (1.9) эта характеристическая функция определена через кратные свертки функций распределений $A(x)$ и $B(x)$. В равенстве (1.10) записано явное выражение функции распределения объема $S(t)$.

Для ММРР-потока определена допредельная характеристическая функция суммарного объема информации $S(t)$, поступившей за время t в заявках потока, которая также, как и для потока восстановления, с помощью обратного преобразования Фурье определяет распределение вероятностей объема $S(t)$.

Однако численная реализация полученных формул требует значительных затрат машинного времени.

Для полумарковского потока получены допредельные плотность распределения (1.89) и функция распределения (1.80) объема информации $S(t)$, поступившей за время t в заявках потока в виде интегральных формул.

Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в работах автора [36, 35, 47, 52, 192, 213, 215]. Применение моделей потоков, представленных в данной главе, опубликованы в работах автора [211].

Глава 2 Математические модели систем массового обслуживания с повторными вызовами

В настоящее время анализ реальных телекоммуникационных систем стимулирует потребность в рассмотрении моделей, которые не относятся к классу классических (системы с ожиданием и системы с потерями). Такие системы характеризуются отсутствием очереди, но при этом необслуженный вызов не теряется, если он поступает в момент занятости сервера, а повторяет свою попытку его захвата через некоторое время. Таким образом нет потери вызова, а происходит лишь задержка в его обслуживании. Это явление возникает в различных реальных системах связи со случайным доступом, где несколько пользователей используют один канал связи.

В связи с этим выделяют класс математических моделей телекоммуникационных систем – системы с повторными вызовами (Retrial Queueing System или RQ-системы). Принципиальное отличие RQ-систем от классических СМО заключается в том, что заявки, заставшие прибор занятым при поступлении в систему, уходят на орбиту, где осуществляет случайную задержку, после чего повторяют попытку занять прибор.

В данной главе представлены RQ-системы различной конфигурации, аналитическое исследование которых будет проведено в Главах 3 – 5.

2.1 RQ-система $MPP|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками

В RQ-системах время, в течение которого прибор находится в незанятом состоянии, является временем простоя системы. В целях увеличения эффективности работы системы нелишним будет уменьшить время простоя. Рассмотрим системы, где прибор не только принимает заявки на обслуживание, поступающие в систему из входящего потока, но и вызывает заявки извне, когда находится в свободном

состоянии. В теории массового обслуживания уже рассматривались модели, где заявки вызывались прибором извне, однако в рассмотренных моделях не было учтено повторное обращение заявок с орбиты.

Модели с повторным обращением и с вызываемыми заявками имеют приложение в работе таких систем, как call-центры, где оператор в свободное время совершает звонки или занимается альтернативными видами деятельности. О приложениях RQ-систем в моделировании call-центров подробно изложено в работах Т. Phung-Duc. Системы с данной особенностью поведения прибора будем называть RQ-системами с вызываемыми заявками.

В работе call-центров зачастую возникают ситуации, при которых работа системы существенно зависит от типа вызываемых заявок, что влияет на продолжительность времени их обслуживания и функционирования системы в целом. Поэтому целесообразно рассматривать математические модели реальных систем с разнотипными вызываемыми заявками.

Рассмотрим RQ-систему с одним обслуживающим прибором, на вход которой поступает MMPP-поток заявок, заданный генератором $\mathbf{Q} = [q_{vm}]$ инфинитезимальных характеристик цепи Маркова $m(t) = 0, 1, \dots, M$ с непрерывным временем, управляющей потоком; диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_m наступления событий в m -ом состоянии MMPP-потока, когда его управляющая цепь $m(t)$ принимает значение $m = \overline{0, M}$.

Если прибор свободен, то заявки, поступающие в систему из потока, занимают прибор для обслуживания и обслуживаются экспоненциальное случайное время с параметром μ_1 . Если поступившая заявка застаёт прибор занятым, она отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Длительность задержки экспоненциальная с параметром σ . После задержки заявка вновь обращается к прибору и ведёт себя так же, как вновь прибывшая из входящего потока заявка.

Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. В системе N типов вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n . Вызванная

заявка мгновенно занимает прибор для обслуживания. Время обслуживания вызываемой заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n . Для удобства исследования пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до N . Рисунок 2.1 иллюстрирует структуру описанной модели.

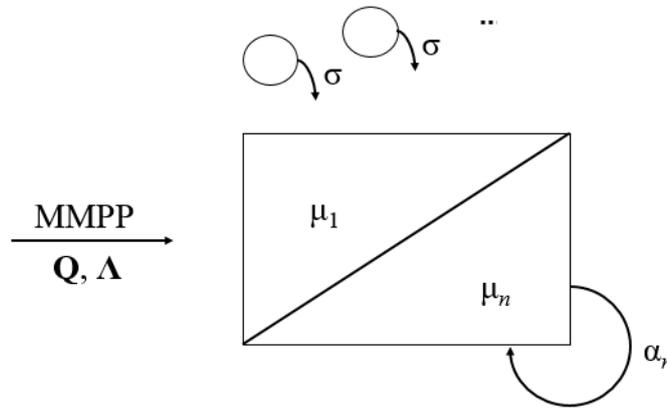


Рисунок 2.1 – RQ-система MMPP|M|1 с N типами вызываемыми заявками

Пусть $i(t)$ — число заявок на орбите в момент времени t . Обозначим процесс $k(t)$, характеризующий состояние прибора в момент времени t . Он принимает следующие значения: 0, если прибор свободен; 1, если обслуживается поступившая заявка; n , если обслуживается вызванная заявка типа n , $n = \overline{2, N}$.

Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей $\{k(t), i(t)\}$ RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками

$$P_k(i, t) = P\{i(t) = i, k(t) = k\}$$

Для решения поставленной задачи рассмотрим трехмерную цепь Маркова $\{i(t), k(t), m(t)\}$, где процесс $m(t)$ называется управляющей цепью Маркова для рассматриваемого MMPP-потока. Обозначим

$$P_k(i, m, t) = P\{i(t) = i, k(t) = k, m(t) = m\} \quad (2.1)$$

вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k , на орбите находится i заявок и управляющая MMPP-поток цепь Маркова $m(t)$ принимает значение m . Для распределения вероятностей $P_k(i, m, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_0(i, m, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda_m + i\sigma + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right) P_0(i, m, t) + \sum_{k=1}^N \mu_k P_k(i, m, t) + \sum_{v=1}^M P_0(i, v, t) q_{vm}, \\
\frac{\partial P_1(i, m, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \mu_1) P_1(i, m, t) + \lambda_m P_1(i-1, m, t) + \lambda_m P_0(i, m, t) + \\
&\quad + (i+1)\sigma P_0(i+1, m, t) + \sum_{v=1}^M P_1(i, v, t) q_{vm}, \\
\frac{\partial P_n(i, m, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \mu_n) P_n(i, m, t) + \lambda_m P_n(i-1, m, t) + \alpha_n P_0(i, m, t) + \\
&\quad + \sum_{v=1}^M P_0(i, v, t) q_{vm}, \quad n = \overline{2, N}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям

$$H_k(u, m, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P_k(i, m, t), \quad k = \overline{0, N}, \tag{2.3}$$

где $j = \sqrt{-1}$. Систему дифференциальных уравнений (2.2) перепишем для частичных характеристических функций (2.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0(u, m, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda_m + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right) H_0(u, m, t) + \sum_{k=1}^N \mu_k H_k(u, m, t) + \sum_{v=1}^M H_0(u, v, t) q_{vm} + \\
&\quad + j\sigma \frac{\partial H_0(u, m, t)}{\partial u}, \\
\frac{\partial H_1(u, m, t)}{\partial t} &= \left(\lambda_m (e^{ju} - 1) - \mu_1\right) H_1(u, m, t) + \lambda_m H_0(u, m, t) + \sum_{v=1}^M H_1(u, v, t) q_{vm} - \\
&\quad - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u, m, t)}{\partial u}, \\
\frac{\partial H_n(u, m, t)}{\partial t} &= \left(\lambda_m (e^{ju} - 1) - \mu_n\right) H_n(u, m, t) + \alpha_n H_0(u, m, t) + \\
&\quad + \sum_{v=1}^M H_0(u, v, t) q_{vm}, \quad n = \overline{2, N}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Запишем систему в матричном виде, используя обозначения

$$\mathbf{H}_k(u, t) = \{H_k(u, 1, t), H_k(u, 2, t), \dots, H_k(u, M, t)\},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_k(u, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial H_k(u, 1, t)}{\partial t}, \frac{\partial H_k(u, 2, t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial H_k(u, M, t)}{\partial t} \right\},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_k(u, t)}{\partial u} = \left\{ \frac{\partial H_k(u, 1, t)}{\partial u}, \frac{\partial H_k(u, 2, t)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial H_k(u, M, t)}{\partial u} \right\}.$$

Также обозначим \mathbf{I} – единичную матрицу. Получим следующую систему

$$\frac{\partial \mathbf{H}_0(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}_0(u, t) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{H}_k(u, t) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}_0(u, t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_1(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}_1(u, t) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{H}_0(u, t) \Lambda - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0(u, t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_n(u, t)}{\partial t} = \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{H}_0(u, t), \quad n = \overline{2, N}. \quad (2.5)$$

Запишем также вспомогательное уравнение, суммируя уравнения полученной системы и домножая на единичный вектор \mathbf{e} соответствующей размерности

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} = (e^{ju} - 1) \left\{ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0(u, t)}{\partial u} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_k(u, t) \Lambda \mathbf{e} \right\}, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{H}(u, t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{H}_k(u, t)$. Рассмотрим полученную систему уравнений (2.5) – (2.6) в

стационарном режиме

$$\mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{H}_k(u) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) = 0,$$

$$\mathbf{H}_1(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{H}_0(u) \Lambda - j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) = 0,$$

$$\mathbf{H}_n(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{H}_0(u) = 0, \quad n = \overline{2, N}. \quad (2.7)$$

тогда вспомогательное уравнение запишется в виде

$$j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_k(u) \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (2.8)$$

Для рассматриваемой RQ-системы ММРР|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками построена математическая модель, выведена система дифференциальных уравнений Колмогорова (2.5) и система Колмогорова в стационарном виде (2.7).

Получить аналитическое решение системы (2.7) в допредельной ситуации возможно только в частном случае при простейшем входящем потоке. Решение систем (2.5) – (2.6) и (2.7) – (2.8) при ММРР входящем потоке предложено в главах 3 и 4 методами асимптотического анализа.

Рассмотрим частный случай системы с разнотипными вызываемыми заявками, на вход которой поступает простейший поток заявок. Для данной системы найдем распределение вероятностей числа заявок на орбите. Обозначим интенсивность простейшего входящего потока λ . Двумерный процесс $\{i(t), k(t)\}$ образует цепь Маркова с непрерывным временем. Обозначим

$$P_k(i, t) = P\{i(t) = i, k(t) = k\} \quad (2.9)$$

вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k , на орбите находится i заявок. Для распределения вероятностей $P_k(i, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова в стационарном виде, которую перепишем для частичных характеристических функций

$$H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P_k(i), \quad k = \overline{0, N}$$

в виде:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right) H_0(u) + \sum_{k=1}^N \mu_k H_k(u) + j\sigma H_0'(u) &= 0, \\ (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1) H_1(u) + \lambda H_0(u) - j\sigma e^{-ju} H_0'(u) &= 0, \\ (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_n) H_n(u) + \alpha_n H_0(u) &= 0, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

а дополнительное уравнение (2.8) в виде

$$j\sigma e^{-ju} H_0'(u) + \lambda \sum_{k=1}^N H_k(u) = 0. \quad (2.11)$$

Характеристическая функция $H(u)$ числа заявок на орбите выражается через частичные характеристические функции $H_k(u)$ следующим образом

$$H(u) = \sum_{k=0}^N H_k(u).$$

Теорема 2.1 *Характеристическая функция $H(u)$ числа заявок на орбите системы $M|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками имеет вид:*

$$H(u) = (1 + v_2)^{-1} (1 - \rho(e^{ju} - 1)) \times \\ \times \left(1 + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \left(\frac{1 - p_n}{1 - p_n e^{ju}} \right)^{-1} \right) \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda}{\sigma}(1+v_1)+1} \prod_{n=2}^N \left[\frac{1 - p_n}{1 - p_n e^{ju}} \right]^{\frac{\alpha_n(\theta_n - \lambda)}{\sigma\theta_n}}, \quad (2.12)$$

где

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad v_1 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\theta_n}, \quad v_2 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n}, \quad p_n = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_n}, \quad \theta_n = \lambda + \mu_n - \mu_1, \quad n = \overline{2, N}.$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (2.10). Данная система уравнений может быть сведена к системе из одного дифференциального и двух алгебраических уравнений, для чего второе и третье уравнения системы (2.10) разрешим относительно функций $H_1(u)$ и $H_n(u)$, $n = \overline{2, N}$ соответственно

$$H_1(u) = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda(e^{ju} - 1)} H_0(u) - \frac{j\sigma e^{-ju}}{\mu_1 - \lambda(e^{ju} - 1)} H_0'(u) \quad (2.13)$$

$$H_n(u) = \frac{\alpha_n}{\mu_n - \lambda(e^{ju} - 1)} H_0(u), \quad n = \overline{2, N}. \quad (2.14)$$

Подставляя выражения (2.13) и (2.14) в первое уравнение системы (2.10), запишем обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $H_0(u)$

$$H_0'(u) = j \frac{\lambda}{\sigma} \left(\frac{\lambda e^{ju}}{\mu_1 - \lambda e^{ju}} + \frac{\mu_1 - \lambda(e^{ju} - 1)}{\mu_1 - \lambda e^{ju}} \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n - \lambda(e^{ju} - 1)} \right) H_0(u), \quad (2.15)$$

решая которое, получаем функцию $H_0(u)$ в явном виде с точностью до мультипликативной константы $H_0(0)$. Подставляем $H_0(u)$ в выражения для функций $H_1(u)$ и $H_n(u)$, $n = \overline{2, N}$ и суммируем все полученные функции согласно равенству

$$H(u) = \sum_{k=0}^N H_k(u).$$

$$H_0(u) = H_0(0) \left(\frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_1 - \lambda e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda}{\sigma}(1+v_1)} \prod_{n=2}^N \left(\frac{\mu_n}{\mu_1 - \lambda(e^{ju} - 1)} \right)^{\frac{\alpha_n(\theta_n - \lambda)}{\sigma\theta_n}}, \quad (2.16)$$

где

$$v_1 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\theta_n}, \quad \theta_n = \mu_n + \lambda - \mu_1, \quad n = \overline{2, N}.$$

Далее, уточним мультипликативную константу $H_0(0)$. Обозначим $r_k = H_k(0)$ – стационарные вероятности того, что прибор находится в состоянии k , $k = \overline{0, N}$.

Предварительно запишем $H_0'(u)$, подставляя $u = 0$ в уравнение (2.15)

$$H_0'(u) \Big|_{u=0} = j \frac{\lambda}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_1 - \lambda} \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right) r_0.$$

Обозначив $v_2 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n}$, запишем систему уравнений (2.10) при $u = 0$.

$$-\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) r_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k r_k - \frac{\lambda + \mu_1 v_2}{\mu_1 - \lambda} \lambda r_0 = 0,$$

$$-\mu_1 r_1 + \lambda r_0 + \frac{\lambda + \mu_1 v_2}{\mu_1 - \lambda} \lambda r_0 = 0,$$

$$-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 = 0, \quad n = \overline{2, N}.$$

Ранг матрицы данной системы меньше числа неизвестных, поэтому добавим условие нормировки для стационарного распределения вероятностей состояний прибора

$$\sum_{k=0}^N r_k = 1.$$

Решением последней системы имеет вид

$$r_0 = \frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_1(1 + v_2)}, \quad r_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad r_n = \frac{\alpha_n(\mu_1 - \lambda)}{\mu_1 \mu_n(1 + v_2)}, \quad n = \overline{2, N}, \quad (2.17)$$

что определяет маргинальное распределение вероятностей состояний прибора.

Подставив r_0 в равенство (2.16), полностью определим частичные характеристические функции $H_k(u)$, $k = \overline{0, N}$. Просуммируем полученные выражения для частичных характеристических функций, запишем характеристическую функцию числа заявок на орбите

$$H(u) = (1 + v_2)^{-1} (1 - \rho(e^{ju} - 1)) \times \\ \times \left(1 + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \left(\frac{1 - p_n}{1 - p_n e^{ju}} \right)^{-1} \right) \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda}{\sigma}(1+v_1)+1} \prod_{n=2}^N \left[\frac{1 - p_n}{1 - p_n e^{ju}} \right]^{\frac{\alpha_n(\theta_n - \lambda)}{\sigma\theta_n}}, \quad (2.18)$$

где

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad v_1 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\theta_n}, \quad v_2 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n}, \quad p_n = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_n}, \quad \theta_n = \lambda + \mu_n - \mu_1, \quad n = \overline{2, N}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1 Из (2.12) следует, что необходимым и достаточным условием существования стационарного режима в системе $M|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками является

$$1 - \rho > 0,$$

откуда

$$\lambda < \mu_1.$$

Определив характеристическую функцию числа заявок на орбите в RQ-системе $M|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками в стационарном режиме функционирования, получим распределение вероятностей искомого случайного процесса $i(t)$, применив к полученной в Теореме 2.1 характеристической функции обратное преобразование Фурье

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u) du, \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (2.19)$$

Зададим $N = 4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, таким образом в рассматриваемой системе три типа вызываемых заявок. Определим также пара-

метр загрузки системы $\rho = \frac{\lambda}{\mu_1}$, значение которого будет определять значение λ интенсивности входящего потока. На рисунках 2.2 – 2.3 приведены распределения вероятностей P_i числа заявок на орбите, полученные по формуле (2.19)

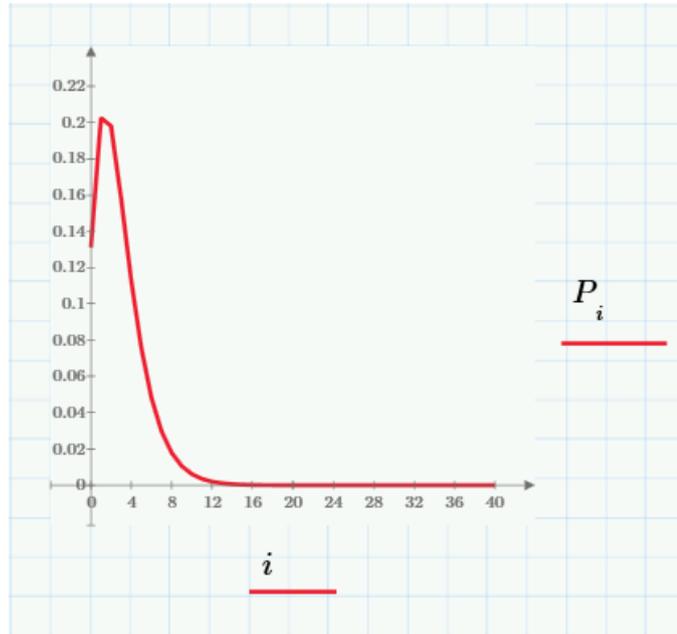


Рисунок 2.2 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками при $\lambda = 0.5$

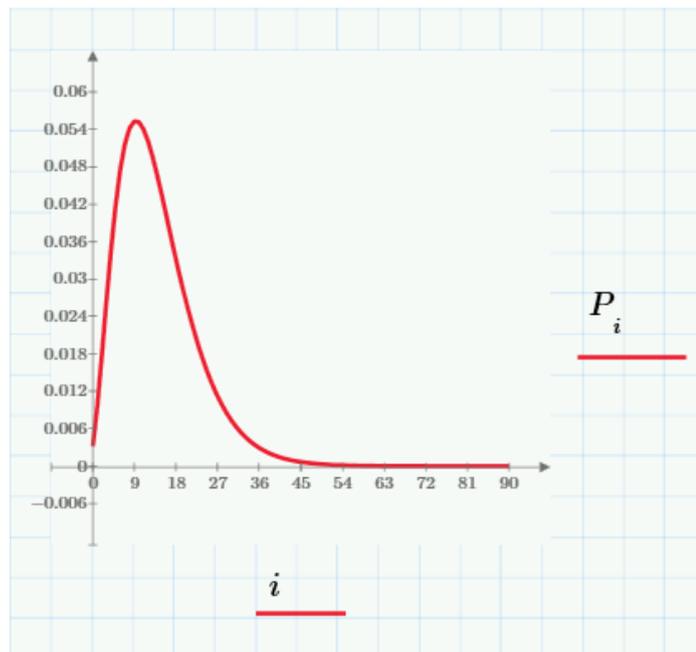


Рисунок 2.3 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками при $\lambda = 0.8$

2.2 RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором

В предложенных системах могут возникать ситуации, при которых работа обслуживающего устройства может быть прервана поломкой, после чего в течение некоторого времени (периода восстановления) происходит его ремонт. Системы с ненадежным прибором часто являются предметом современных исследований [170, 174], результаты которых могут применяться в работе с мультимедийными приложениями.

2.2.1 RQ-система M|M|1 с несколькими типами вызываемых заявок и ненадежным прибором

Рассмотрим систему с повторными вызовами (рисунок 2.4), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ .

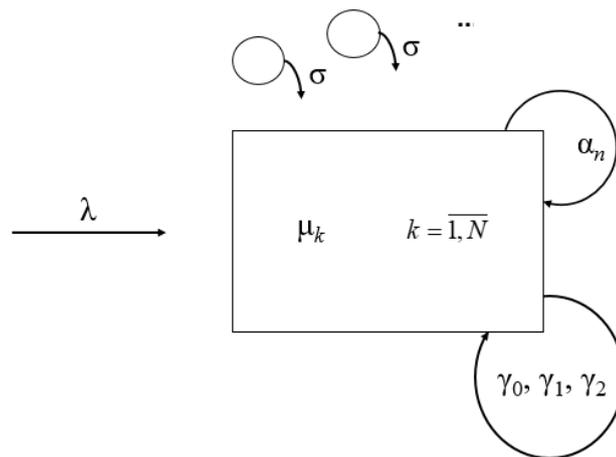


Рисунок 2.4 – Система M|M|1 с повторными вызовами, несколькими типами вызываемых заявок и ненадежным прибором

Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его и обслуживается в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1 . Если же в момент поступления заявка застаёт прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку, длительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ .

Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. Существует несколько типов вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n . Вызываемая заявка встает на прибор и обслуживается в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_n . Для удобства пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до N .

Будем рассматривать систему с ненадежным прибором. Прибор выходит из строя с интенсивностью γ_0 , когда свободен, или с интенсивностью γ_1 , когда обслуживает заявку входящего потока. После выхода из строя прибор находится в состоянии восстановления. Длительность периода восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром γ_2 . В момент поломки (выхода из строя) прибора обслуживаемая заявка переходит на орбиту. Когда прибор обслуживает вызываемую заявку или прибор находится в состоянии восстановления, заявки входящего потока уходят на орбиту. Будем считать, что прибор не может выйти из строя при обслуживании вызываемых заявок, так как обслуживание инициировано самим прибором.

Обозначим процесс $k(t)$ – состояние прибора в момент времени t . Этот процесс может принимать следующие значения:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор свободен;} \\ 1, & \text{прибор занят обслуживанием заявки входящего потока;} \\ n, & \text{прибор занят обслуживанием вызываемой заявки типа } n, n = \overline{2, N}; \\ N + 1, & \text{прибор находится в состоянии восстановления.} \end{cases}$$

Также введем случайный процесс $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t .

Ставится задача нахождения стационарного распределения числа заявок на орбите. Для этого рассмотрим двумерный марковский процесс $\{k(t), i(t)\}$. Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i, t),$$

составим систему Колмогорова.

$$\frac{\partial P_0(i, t)}{\partial t} = -(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + i\sigma + \gamma_0)P_0(i, t) + \sum_{k=1}^N \mu_k P_k(i, t) + \gamma_2 P_{N+1}(i, t),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_1 + \gamma_1)P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + \sigma(i+1)P_0(i+1,t) + \lambda P_1(i-1,t), \\ \frac{\partial P_n(i,t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_n)P_n(i,t) + \lambda P_n(i-1,t) + \alpha_n P_0(i,t), \quad n = \overline{2, N}, \\ \frac{\partial P_{N+1}(i,t)}{\partial t} &= -(\lambda + \gamma_2)P_{N+1}(i,t) + \lambda P_{N+1}(i-1,t) + \gamma_0 P_0(i,t) + \gamma_1 P_1(i-1,t).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H_k(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i,t), \quad k = \overline{0, N+1}.$$

Систему (2.20) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t} &= \\ &= -\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0\right) H_0(u,t) + \sum_{k=1}^N \mu_k H_k(u,t) + \gamma_2 H_{N+1}(u,t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}, \\ \frac{\partial H_1(u,t)}{\partial t} &= \lambda H_0(u,t) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) H_1(u,t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}, \\ \frac{\partial H_n(u,t)}{\partial t} &= \alpha_n H_0(u,t) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_n) H_n(u,t), \quad n = \overline{2, N}, \\ \frac{\partial H_N(u,t)}{\partial t} &= \gamma_0 H_0(u,t) + \gamma_1 e^{ju} H_1(u,t) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2) H_{N+1}(u,t).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Суммируя уравнения системы (2.21), обозначив

$$H(u,t) = \sum_{k=0}^{N+1} H_k(u,t), \quad \frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{\partial H_k(u,t)}{\partial t},$$

получим дополнительное уравнение

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} + (\lambda + \gamma_1) H_1(u,t) + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} H_n(u,t).\quad (2.22)$$

Рассмотрим полученную систему уравнений (2.21) – (2.22) в стационарном режиме

$$\begin{aligned}-\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0\right) H_0(u) + \sum_{k=1}^N \mu_k H_k(u) + \gamma_2 H_{N+1}(u) + j\sigma H_0'(u) &= 0, \\ \lambda H_0(u) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) H_1(u) - j\sigma e^{-ju} H_0'(u) &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n H_0(u) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_n) H_n(u) &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\ \gamma_0 H_0(u) + \gamma_1 e^{ju} H_1(u) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2) H_{N+1}(u) &= 0. \\ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} + (\lambda + \gamma_1) H_1(u) + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} H_n(u) &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для рассматриваемой RQ-системы M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором построена математическая модель, выведена система дифференциальных уравнений Колмогорова (2.21) – (2.22) и система Колмогорова в стационарном виде (2.23). Эти системы будут основными в дальнейших исследованиях.

2.2.2 Условие существования стационарного режима в RQ-системе M|GI|1 с однотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором

Найдем условие существования стационарного режима в RQ-системе с вызываемыми однотипными заявками, простейшим входящим потоком, произвольным временем обслуживания заявок и ненадежным прибором. Проиллюстрируем зависимость полученного условия от того, дообслуживаются ли прерванные заявки или обслуживаются заново после возобновления работы прибора.

RQ-система M|GI|1 с однотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок. Рассмотрим однолинейную RQ-систему (рисунок 2.4) с вызываемыми заявками и ненадежным прибором. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ .

Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его, а прибор начинает обслуживание в течение времени, распределенного с функцией $B_1(x)$. Если в момент поступления заявки прибор занят, то она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ , завершив которую повторно обращается к прибору с попыткой получить обслуживание.

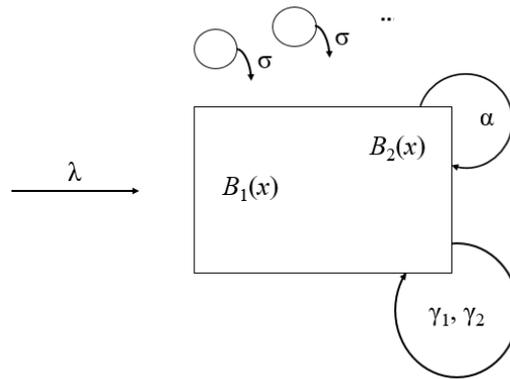


Рисунок 2.5 – RQ-система $M|GI|1$ с однотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором

Когда прибор свободен, он вызывает из внешней среды (не с орбиты) с интенсивностью α дополнительные заявки, время обслуживания которых имеет функцию распределения $B_2(x)$.

Будем рассматривать систему с ненадежным прибором, который на интервалах обслуживания поступивших заявок с интенсивностью γ_1 выходит из строя и восстанавливается с интенсивностью γ_2 . В свободном состоянии и при обслуживании вызываемых заявок прибор надежен и не может выходить из строя.

Если во время обслуживания поступившей заявки прибор выходит из строя, то обслуживаемая заявка остается ждать на приборе, и как только прибор восстанавливается, она дообслуживается.

Когда прибор обслуживает вызываемую заявку, или прибор находится в состоянии восстановления, заявки входящего потока уходят на орбиту.

Обозначим процесс $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , поступивших (не вызванных) в систему.

Ставится задача – нахождение условий существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе $M|GI|1$ с ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок.

Состояния прибора в момент времени t обозначим $k(t)$:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{прибор свободен;} \\ 1, & \text{прибор занят обслуживанием заявки входящего потока;} \\ 2, & \text{прибор занят обслуживанием вызываемой заявки;} \\ 3, & \text{прибор находится в состоянии восстановления.} \end{cases}$$

$z(t)$ – остаточное время обслуживания, когда $k = \overline{1, K}$. Также обозначим вероятности

$$\begin{aligned} P\{k(t) = k, i(t)=i, z(t)<z\} &= P_k(i, z, t), \quad k=1, 2, 3, \\ P\{k(t) = k, i(t)=i\} &= P_k(i, t), \quad k=0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Так как случайный процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$, $k=1, 2, 3$, $\{k(t), i(t)\}$, $k=0$, с переменным числом компонент марковский, то для распределения вероятностей (2.24) составим систему уравнений Колмогорова.

Обозначим $P_k(i, \infty, t) = P_k(i, t)$, $k = 1, 2$. При $k = 3$ $z(t)$ – остаточное время обслуживания заявки, которая дожидается восстановления прибора для завершения своего обслуживания. Система уравнений Колмогорова для распределения вероятностей в стационарном режиме имеет вид

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha + i\sigma)P_0(i) + \frac{\partial P_1(i+1, 0)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(i, 0)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial P_1(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} - & \\ -(\lambda + \gamma_1)P_1(i, z) + \lambda P_1(i-1, z) + \gamma_2 P_3(i, z) + \lambda B_1(z)P_0(i-1) + i\sigma B_1(z)P_0(i) &= 0, \\ \frac{\partial P_2(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(i, 0)}{\partial z} - \lambda P_2(i, z) + \lambda P_2(i-1, z) + \alpha B_2(z)P_0(i) &= 0, \\ -(\lambda + \gamma_2)P_3(i, z) + \lambda P_3(i-1, z) + \gamma_1 P_1(i, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H_0(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_0(i), \quad H_k(u, z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i, z), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (2.26)$$

Систему (2.25) перепишем для функций (2.26)

$$-(\lambda + \alpha)H_0(u) + e^{-ju} \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + j\sigma H_0'(u) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_1(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(i, 0)}{\partial z} + \\
& + \left(\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_1 \right) H_1(u, z) + \gamma_2 H_3(u, z) + B_1(z) \left(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(i) \right) = 0, \\
& \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \lambda(e^{ju} - 1) H_2(u, z) + \alpha B_2(z) H_0(u) = 0, \\
& \gamma_1 H_1(u, z) + \left(\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2 \right) H_3(u, z) = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

В системе (2.16) выполним предельный переход, устремив $z \rightarrow \infty$ и суммирование полученных уравнений, обозначив $H_k(u) = H_k(u, \infty)$, $k = \overline{1, 3}$ и характеристическую функцию $H(u) = \sum_{k=0}^3 H_k(u)$ числа заявок в системе, получим уравнение

$$\lambda e^{ju} H(u) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} = 0. \tag{2.17}$$

Равенство (2.17) позволяет в системе (2.16) исключить первое уравнение, заменив его на уравнение (2.17), тогда систему уравнений для частных характеристических функций (2.16) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \\
& + \left(\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_1 \right) H_1(u, z) + \gamma_2 H_3(u, z) + B_1(z) \left(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u) \right) = 0, \\
& \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \lambda(e^{ju} - 1) H_2(u, z) + \alpha B_2(z) H_0(u) = 0, \\
& \gamma_1 H_1(u, z) + \left(\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2 \right) H_3(u, z) = 0, \\
& \lambda e^{ju} H(u) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Распределение вероятностей числа заявок в RQ-системе с дообслуживанием заявок. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1 Для рассматриваемой RQ-системы с дообслуживанием распределение вероятностей состояния прибора $r_k = P\{k(t) = k\}$, $k = \overline{0, 3}$ имеет вид

$$r_0 = \frac{1}{1 + \alpha b_2} \left\{ 1 - \lambda b_1 \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_2} \right\}, \quad r_1 = \lambda b_1, \quad r_2 = \alpha b_2 r_0, \quad r_3 = \lambda b_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (2.19)$$

Здесь начальные моменты первого порядка $b_1 = \int_0^{\infty} x dB_1(x)$, $b_2 = \int_0^{\infty} x dB_2(x)$.

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$r_k(z) = H_k(0, z), \quad k = \overline{1, 3}, \quad r_0 = H_0(0), \quad jm_0 = H'_0(u)|_{u=0},$$

$$r'_k(z) = \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} \Big|_{u=0}, \quad r'_k(0) = \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} \Big|_{u=0}, \quad k = 1, 2. \quad (2.20)$$

то при $u = 0$ из системы (2.18) получим систему уравнений:

$$r'_1(z) - r'_1(0) - \gamma r_1(z) + \gamma_2 r_3(z) + B_1(z)(\lambda r_0 + \sigma m_0) = 0,$$

$$r'_2(z) - r'_2(0) + \alpha B_2(z) r_0 = 0,$$

$$\gamma_1 r_1(z) - \gamma_2 r_3(z) = 0,$$

$$\lambda - r'_1(0) = 0. \quad (2.21)$$

Складываем первое и третье уравнения системы (2.21), получим

$$r'_1(z) - r'_1(0) + B_1(z)(\lambda r_0 + \sigma m_0) = 0. \quad (2.22)$$

Из четвертого уравнения имеем

$$r'_1(0) = \lambda.$$

Второе уравнение системы (2.21) перепишем в виде

$$r'_2(z) = r'_2(0) - \alpha B_2(z) r_0. \quad (2.23)$$

Устремим $z \rightarrow \infty$ в (2.22) и (2.23), получим, что выполняются равенства

$$\lambda = \lambda r_0 + \sigma m_0,$$

$$r'_2(0) = \alpha r_0.$$

Уравнения (2.22) и (2.23) перепишем в виде

$$r'_1(z) = \lambda(1 - B_1(z)),$$

$$r'_2(z) = \alpha r_0(1 - B_2(z)). \quad (2.24)$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} r_1(z) &= \lambda \int_0^z (1 - B_1(x)) dx, \\ r_2(z) &= \alpha r_0 \int_0^z (1 - B_2(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

При $z \rightarrow \infty$ из этих равенств и третьего уравнения системы (2.21) получим выражения

$$r_1 = \lambda b_1, \quad r_2 = \alpha b_2 r_0, \quad r_3 = \lambda b_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (2.26)$$

Значение вероятности r_0 найдем из условия нормировки $\sum_{k=0}^3 r_k = 1$. **Теорема доказана.**

Следствие 2.1 *Условием существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе с дообслуживанием является выполнение неравенства*

$$\lambda < \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (2.27)$$

Доказательство. Условие (2.27) следует из положительности вероятности r_0 в (2.19). Следствие доказано.

Определим пропускную способность S системы как точную верхнюю границу среднего числа заявок, которые могут быть обслужены в рассматриваемой системе за единицу времени. В силу неравенства (2.27) значение S для рассматриваемой RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором, определяется равенством

$$S = \frac{1}{b_1} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (2.28)$$

Если значение параметра λ входящего потока определять равенством $\lambda = \rho S$, то при любых значениях параметра $0 < \rho < 1$ в рассматриваемой RQ-системе существует стационарный режим, а вероятности r_k из (2.19) состояний прибора можно записать в виде

$$r_0 = \frac{1-\rho}{1+\alpha b_2}, \quad r_1 = \rho \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad r_2 = \alpha b_2 \frac{1-\rho}{1+\alpha b_2}, \quad r_3 = \rho \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (2.29)$$

Распределение вероятностей состояний прибора инвариантно к виду функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ времени обслуживания как поступающих, так и вызываемых заявок. При этом интенсивность λ входящего потока линейно зависит от S , которая в силу (2.28) инвариантна к виду функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$.

RQ-система $M|GI|1$ с одготипными вызываемыми заявками, ненадежным прибором и обслуживанием прерванных заявок заново. Будем рассматривать ту же систему $M|GI|1$ с ненадежным прибором, который на интервалах обслуживания поступивших заявок с интенсивностью γ_1 выходит из строя и восстанавливается с интенсивностью γ_2 , при этом в свободном состоянии и при обслуживании вызываемых заявок прибор надежен и не может выходить из строя. Важным отличием является то, что если во время обслуживания поступившей заявки прибор выходит из строя, то обслуживаемая заявка мгновенно переходит на орбиту и при повторном поступлении на прибор ее обслуживание начинается заново.

Обозначим процесс $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t , поступивших (не вызванных) в систему. Найдем условия существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе.

Обозначим процесс $z(t)$ – остаточное время обслуживания, когда $k = 1, 2$.

Также введем стационарные вероятности

$$\begin{aligned} P\{k(t) = k, i(t)=i, z(t)<z\} &= P_k(i, z, t), \quad k=1, 2, \\ P\{k(t) = k, i(t)=i\} &= P_k(i, t), \quad k= 0, 3. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Так как случайный процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$, $k=1, 2$; $\{k(t), i(t)\}$, $k=0, 3$, с переменным числом состояний марковский, то для распределения вероятностей (2.30) составим систему уравнений Колмогорова и запишем ее в стационарном виде

$$-(\lambda + \alpha + i\sigma)P_0(i) + \frac{\partial P_1(i+1, 0)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(i, 0)}{\partial z} + \gamma_2 P_3(i) = 0,$$

$$\frac{\partial P_1(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} -$$

$$-(\lambda + \gamma_1)P_1(i, z) + \lambda P_1(i-1, z) + \lambda B_1(z)P_0(i-1) + i\sigma B_1(z)P_0(i) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2(i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(i, 0)}{\partial z} - \lambda P_2(i, z) + \lambda P_2(i-1, z) + \alpha B_2(z) P_0(i) &= 0, \\ -(\lambda + \gamma_2) P_3(i) + \lambda P_3(i-1) + \gamma_1 P_1(i, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Введем частичные характеристические функции

$$\begin{aligned} H_0(u) &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P_0(i), \quad H_k(u, z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P_k(i, z), \quad k = 1, 2, \\ H_3(u) &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P_3(i). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Систему (2.31) перепишем для функций (2.32)

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha) H_0(u) + \gamma_2 H_3(u) + e^{-ju} \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + j\sigma H_0'(u) &= 0, \\ \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_1) H_1(u, z) + B_1(z) (\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) &= 0, \\ \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \lambda(e^{ju} - 1) H_2(u, z) + \alpha B_2(z) H_0(u) &= 0, \\ \gamma_1 H_1(u, z) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2) H_3(u) &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

В системе (2.33) устремим $z \rightarrow \infty$ и просуммируем уравнения, обозначив

$$H_k(u) = H_k(u, \infty), \quad k = 1, 2 \text{ и характеристическую функцию } H(u) = \sum_{k=0}^3 H_k(u) \text{ числа за-}$$

явок в системе, получим уравнение

$$\lambda e^{ju} H(u) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} = 0. \quad (2.34)$$

Равенство (2.34) позволяет в системе (2.33) исключить первое уравнение, заменив его на уравнение (2.34), тогда систему уравнений для частичных характеристических функций (2.32) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + \\ + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_1) H_1(u, z) + \gamma_2 H_3(u) + B_1(z) (\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) &= 0, \\ \frac{\partial H_2(u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + \lambda(e^{ju} - 1) H_2(u, z) + \alpha B_2(z) H_0(u) &= 0, \end{aligned}$$

$$\gamma_1 H_1(u, z) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2) H_3(u) = 0,$$

$$\lambda e^{ju} H(u) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} = 0. \quad (2.35)$$

Обозначим преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$B_k^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB_k(x), \quad H_k^*(u, s) = \int_0^{\infty} e^{-sz} dH_k(u, z), \quad k = 1, 2. \quad (2.36)$$

Систему (2.35) перепишем в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_1 + s) H_1^*(u, s) + B_1^*(s) (\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) &= 0, \\ -\frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + (\lambda(e^{ju} - 1) + s) H_2^*(u, s) + \alpha B_2^*(s) H_0(u) &= 0, \\ \gamma_1 H_1^*(u, s) + (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2) H_3(u) &= 0, \\ \lambda e^{ju} H(u) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Эта система будет основной в дальнейших исследованиях.

Распределение вероятностей состояний прибора и условие существования стационарного режима. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.2 Для рассматриваемой RQ -системы с обслуживанием заявок заново распределение вероятностей состояния прибора $r_k = P\{k(t) = k\}$, $k = \overline{0, 3}$ имеет вид

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{1 + \alpha b_2} \left\{ 1 - \lambda \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_2} \cdot \frac{1 - B_1^*(\gamma_1)}{\gamma_1 B_1^*(\gamma_1)} \right\}, & r_1 &= \lambda \frac{1 - B_1^*(\gamma_1)}{\gamma_1 B_1^*(\gamma_1)}, \\ r_2 &= \alpha b_2 r_0, & r_3 &= \lambda \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{1 - B_1^*(\gamma_1)}{\gamma_1 B_1^*(\gamma_1)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Здесь начальные моменты первого порядка $b_2 = \int_0^{\infty} x dB_2(x)$, преобразование

Лапласа-Стилтьеса $B_1^*(\gamma_1) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma_1 x} dB_1(x)$.

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$r_k^*(s) = H_k^*(0, s), \quad k = 1, 2; \quad r_k = H_k(0), \quad k = 0, 3; \quad jm_0 = H'_0(u)|_{u=0},$$

$$r'_k(0) = \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} \Big|_{u=0}, \quad k = 1, 2. \quad (2.39)$$

то при $u = 0$ из системы (2.37) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} -r'_1(0) + (s - \gamma_1)r_1^*(s) + B_1^*(s)(\lambda r_0 + \sigma m_0) &= 0, \\ -r'_2(0) + sr_2^*(s) + \alpha B_2^*(s)r_0 &= 0, \\ \gamma_1 r_1^*(s) - \gamma_2 r_3 &= 0, \\ \lambda - r'_1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (2.40) при $s = \gamma_1$ можно записать

$$\begin{aligned} r'_1(0) &= B_1^*(\gamma_1)(\lambda r_0 + \sigma m_0), \\ \lambda &= r'_1(0). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Дифференцируя по s второе уравнение в (2.40) и полагая здесь $s=0$, получим уравнение

$$r_2 = \alpha b_2 r_0.$$

Тогда систему (2.40) перепишем в виде, при этом положим $s = 0$

$$\begin{aligned} -\lambda - \gamma_1 r_1 + \frac{\lambda}{B_1^*(\gamma_1)} &= 0, \\ r_2 &= \alpha b_2 r_0, \\ \gamma_1 r_1 - \gamma_2 r_3 &= 0. \end{aligned}$$

Находя решение r_k , $k = \overline{0, 3}$ этой системы, удовлетворяющее условию нормировки, для r_k получим выражения, совпадающие с (2.38). **Теорема доказана.**

Следствие 2.2 Условием существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе является выполнение неравенства

$$\lambda < \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{\gamma_1 B_1^*(\gamma_1)}{1 - B_1^*(\gamma_1)}. \quad (2.42)$$

Доказательство. Условие (2.42) следует из положительности вероятности r_0 в (2.38). Следствие доказано.

В силу неравенства (2.42) значение пропускной способности S для рассматриваемой RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором, определяется равенством

$$S = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{\gamma_1 B_1^*(\gamma_1)}{1 - B_1^*(\gamma_1)}. \quad (2.43)$$

Если значение параметра λ входящего потока определять равенством $\lambda = \rho S$, то при любых значениях параметра $0 < \rho < 1$ в рассматриваемой RQ-системе существует стационарный режим, а вероятности r_k из (12) состояний прибора можно записать в виде

$$r_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \alpha b_2}, \quad r_1 = \rho \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad r_2 = \alpha b_2 \frac{1 - \rho}{1 + \alpha b_2}, \quad r_3 = \rho \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (2.44)$$

При этом интенсивность λ входящего потока линейно зависит от S , которая в силу (2.43) существенно зависит от вида функции распределения $B_1(x)$.

Для рассматриваемой RQ-системы с обслуживанием заново повторных заявок, пропускная способность S из (2.43) обладает нестандартным свойством.

Пусть $\gamma_2 = \nu \gamma_1$, где параметр ν может принимать любые положительные значения $\nu > 0$, тогда $S = S(\gamma_1)$.

Рассмотрим значения пропускной способности $S(\gamma_1)$ при возрастающих значениях параметра γ , запишем

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \infty} S(\gamma_1) = \frac{\nu}{\nu + 1} \lim_{\gamma_1 \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1 B_1^*(\gamma_1)}{1 - B_1^*(\gamma_1)} = \frac{\nu}{\nu + 1} \lim_{\gamma_1 \rightarrow \infty} \gamma_1 B_1^*(\gamma_1) = \frac{\nu}{\nu + 1} B_1'(0). \quad (2.45)$$

Плотность распределения в нуле $B_1'(0)$ может принимать любые неотрицательные значения в зависимости от вида функции распределения $B_1(x)$.

Если $B_1'(0) = \infty$, то для любого сколь угодно большого значения параметра λ , в силу (2.45) можно найти такое значение γ_1 – интенсивности отказов прибора, при котором выполняется неравенство (2.42), а следовательно в рассматриваемой RQ-системе существует стационарный режим.

Если $B_1'(0) = 0$, то для любого сколь угодно малого значения параметра λ существуют такие значения γ_1 – интенсивности отказов прибора, при которых неравенство (2.42) не выполняется, и в системе не существует стационарный режим при любой сколь угодно малой доли $\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{1}{\nu + 1}$ времени, расходуемого на восстановление (ремонт) прибора.

Пусть $B_1(x)$ – функция гамма-распределения с одинаковыми значениями параметра формы α_1 и масштаба β_1 , то есть $\alpha_1 = \beta_1$, тогда среднее значение $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ времени обслуживания вызываемых заявок равно единице, а $B_1^*(\gamma_1) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \gamma_1}\right)^{\alpha_1}$. При $\gamma_2 = \nu\gamma_1$ пропускная способность S зависит от γ_1 и имеет вид

$$S = S(\gamma_1) = \frac{\nu}{\nu + 1} \cdot \frac{\gamma_1 B_1^*(\gamma_1)}{1 - B_1^*(\gamma_1)}.$$

Приведем численный пример, положив $\nu = 4$. В таблице приведены значения пропускной способности $S_1(\gamma_1)$ при $\beta_1 = 5$ и $S_2(\gamma_1)$ при $\beta_1 = 0.2$ и указанных значениях параметра γ_1 .

Таблица 2.1 – Значения пропускной способности S

γ_1	0.01	0.1	1	10	100
S_1	0.797	0.769	0.538	0.033	$2 \cdot 10^{-5}$
S_2	0.816	0.947	1.856	6.692	32.427

Таким образом, для предложенной модели найдено распределение вероятностей состояний прибора и условие существования стационарного режима. Показано, что пропускная способность системы обладает нестандартным свойством.

2.2.3 Характеристическая функция числа заявок в RQ-системе M|GI|1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и обслуживанием прерванных заявок заново

В системе (2.37) введем обозначения

$$g_1(u) = \lambda(1 - e^{ju}) + \gamma_1, \quad g_2(u) = \lambda(1 - e^{ju}). \quad (2.46)$$

Систему (2.37) перепишем в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} + (s - g_1(u))H_1^*(u, s) + B_1^*(s)(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) &= 0, \\ -\frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} + (s - g_2(u))H_2^*(u, s) + \alpha B_2^*(s)H_0(u) &= 0, \\ \gamma_1 H_1^*(u, s) - (g_2(u) + \gamma_2)H_3(u) &= 0, \\ \lambda e^{ju} H(u) - \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

При $s = g_1(u)$ в первом уравнении и $s = g_2(u)$ во втором уравнении получим равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1(u, 0)}{\partial z} &= B_1^*(g_1(u))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)), \\ \frac{\partial H_2(u, 0)}{\partial z} &= \alpha B_2^*(g_2(u))H_0(u), \end{aligned}$$

а систему (2.47) перепишем в виде

$$\begin{aligned} (s - g_1(u))H_1^*(u, s) + (B_1^*(s) - B_1^*(g_1(u)))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) &= 0, \\ (s - g_2(u))H_2^*(u, s) + \alpha(B_2^*(s) - B_2^*(g_2(u)))H_0(u) &= 0, \\ \gamma_1 H_1^*(u, s) - (g_2(u) + \gamma_2)H_3(u) &= 0, \\ \lambda e^{ju} H(u) - B_1^*(g_1(u))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) &= 0. \end{aligned}$$

Положим в этой системе $s = 0$, обозначим $H_k^*(u, 0) = H_k(u)$, $k = 1, 2$, получим

$$-g_1(u)H_1(u) + (1 - B_1^*(g_1(u)))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
-g_2(u)H_2(u) + \alpha(1 - B_2^*(g_2(u)))H_0(u) &= 0, \\
\gamma_1 H_1(u) - (g_2(u) + \gamma_2)H_3(u) &= 0, \\
\lambda e^{ju} H(u) - B_1^*(g_1(u))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Из первых трех уравнений этой системы можно записать

$$\begin{aligned}
H_1(u) &= \frac{1 - B_1^*(g_1(u))}{g_1(u)} (\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)), \\
H_2(u) &= \alpha \frac{1 - B_2^*(g_2(u))}{g_2(u)} H_0(u), \\
H_3(u) &= \frac{\gamma_1}{g_2(u) + \gamma_2} H_1(u).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Подставим эти выражения в четвертое уравнение системы (2.48), получим равенство

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda e^{ju} H(u) - B_1^*(g_1(u))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) = \\
&= \lambda e^{ju} \left\{ H_0(u) \left(1 + \alpha \frac{1 - B_2^*(g_2(u))}{g_2(u)} \right) + H_1(u) \left(1 + \frac{\gamma_1}{g_2(u) + \gamma_2} \right) \right\} - \\
&\quad - B_1^*(g_1(u))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) = \\
&= \lambda e^{ju} \left\{ H_0(u) \left(1 + \alpha \frac{1 - B_2^*(g_2(u))}{g_2(u)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 - B_1^*(g_1(u))}{g_1(u)} \cdot \frac{g_2(u) + \gamma_1 + \gamma_2}{g_2(u) + \gamma_2} (\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)) \right\} - \\
&\quad - B_1^*(g_1(u))(\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)),
\end{aligned}$$

которое перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&\lambda e^{ju} H_0(u) \left(1 + \alpha \frac{1 - B_2^*(g_2(u))}{g_2(u)} \right) = \\
&= \left(B_1^*(g_1(u)) - \lambda e^{ju} \frac{1 - B_1^*(g_1(u))}{g_1(u)} \cdot \frac{g_2(u) + \gamma_1 + \gamma_2}{g_2(u) + \gamma_2} \right) (\lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u)). \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Обозначим

$$f(u) = \frac{1 + \alpha \frac{1 - B_2^*(g_2(u))}{g_2(u)}}{B_1^*(g_1(u)) - \lambda e^{ju} \frac{1 - B_1^*(g_1(u))}{g_1(u)} \cdot \frac{g_2(u) + \gamma_1 + \gamma_2}{g_2(u) + \gamma_2}}. \quad (2.51)$$

Равенство (2.50) перепишем в виде

$$\lambda e^{ju} H_0(u) f(u) = \lambda e^{ju} H_0(u) - j\sigma H_0'(u),$$

то есть в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$H_0'(u) = j \frac{\lambda}{\sigma} e^{ju} H_0(u) (f(u) - 1).$$

относительно функции $H_0(u)$, удовлетворяющей условию $H_0(0) = r_0$. Решение $H_0(u)$ этого уравнения имеет вид

$$H_0(u) = r_0 \exp \left\{ j \frac{\lambda}{\sigma} \int_0^u e^{jx} (f(x) - 1) dx \right\}. \quad (2.52)$$

С учетом полученных равенств, равенства (2.49) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} H_1(u) &= \frac{1 - B_1^*(g_1(u))}{g_1(u)} \lambda e^{ju} H_0(u) f(u), \\ H_2(u) &= \alpha \frac{1 - B_2^*(g_2(u))}{g_2(u)} H_0(u), \\ H_3(u) &= \frac{\gamma_1}{g_2(u) + \gamma_2} H_1(u). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3 Пусть применяются $g_1(u)$ и $g_2(u)$ из (2.46), а также $f(u)$ из (2.51), тогда характеристическая функция

$$H(u) = M e^{ju i(t)} = H_0(u) + H_1(u) + H_2(u) + H_3(u).$$

числа $i(t)$ заявок в рассматриваемой RQ-системе определяется равенствами (2.52), (2.53).

Стационарное распределение вероятностей $P(i) = P\{i(t)=i\}$ числа заявок в рассматриваемой RQ-системе определяется обратным преобразованием Фурье и имеет вид

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u) du, \quad (2.54)$$

в котором выражение для характеристической функции $H(u)$ определено в сформулированной выше теореме 2.3

Численная реализация распределения вероятностей $P(i)$ из (2.54) не представляет труда при любых значениях исходных параметров и функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$, удовлетворяющих условию (2.42) существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе. Зададим $\lambda = 0.4$, $\gamma_1 = 0.01$, $\gamma_2 = 2$, $\sigma = 0.1$, $\alpha = 0.5$, параметры экспоненциальных функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$ соответственно.

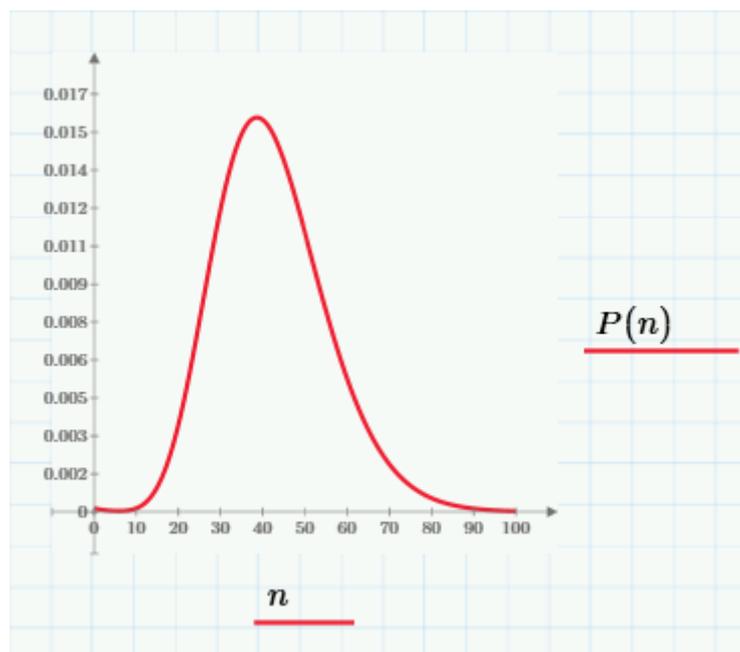


Рисунок 2.6 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M|GI|1$ с однопоточными вызываемыми заявками и обслуживанием прерванных заявок заново

Таким образом, рассмотрена RQ-система $M|GI|GI|1$ с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и обслуживанием прерванных заявок заново. Для предложенной модели найдено распределение вероятностей состояний прибора, условие существования стационарного режима и получено допредельное распределение числа заявок в системе.

2.3 Тандемные RQ-системы с общей орбитой

Тандемные системы массового обслуживания представляют собой системы, которые обладают свойствами как СМО, так и СеМО. В самом простейшем случае такие системы могут рассматриваться как сети массового обслуживания с линейной топологией [165].

Тандемные СМО используются для моделирования процесса обработки, в котором входящие запросы обслуживаются последовательно на нескольких этапах. Потребность в последовательных сервисах возникает при обработке запросов в call-центрах [163, 173], при управлении потоком данных между элементами мультиагентной робототехнической системы [31] и т. д.

Если в тандемных системах буфер оказывается заполнен, то необслуженный запрос теряется [112]. В диссертационной работе представлены тандемные системы с бесконечной орбитой, что позволяет избежать потерь запросов.

В данной главе рассмотрим математические модели тандемных систем с повторными вызовами и общей орбитой.

2.3.1 Тандемная RQ-система с общей орбитой и входящим ММРР-поток

Рассмотрим (рисунок 2.7) RQ-систему с двумя последовательно обслуживающими приборами, на вход которой поступает ММРР поток. Если заявка входящего потока обнаруживает первый прибор свободным, то она встает на прибор и обслуживается в течении экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1 , после чего обращается ко второму прибору. Если второй прибор свободен, заявка встает на него и обслуживается в течении экспоненциально-распределен-

ного времени с параметром μ_2 . Если заявка входящего потока застаёт первый прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор. Если заявка после обслуживания на первом приборе застаёт второй прибор занятым, она мгновенно отправляется на ту же орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор.

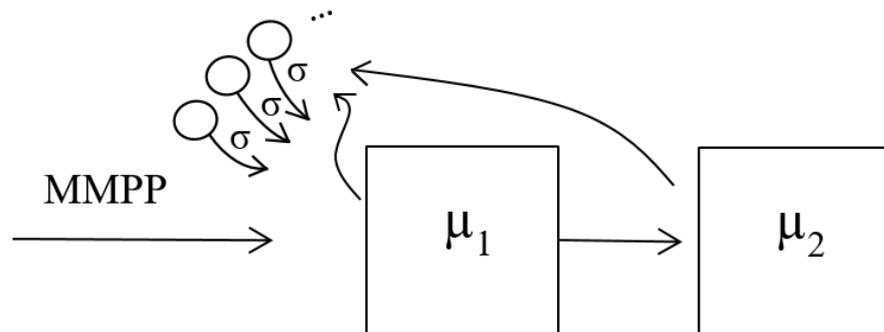


Рисунок 2.7 – Тандемная RQ-система с общей орбитой и входящим MMPP-потокком

Введем обозначения: процесс $m(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMPP-потокком, заданная матрицей инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} с элементами q_{vm} , $v, m = \overline{1, M}$; набор неотрицательных величин $\lambda_m \geq 0$; процесс $k(t)$ – состояние приборов в момент времени t : 0, если оба прибора свободны; 1, если первый прибор занят, второй свободен; 2, если первый прибор свободен, второй занят; 3, если оба прибора заняты; процесс $i(t)$ – число заявок, находящихся на орбите в момент времени t .

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок $i(t)$ на орбите в рассматриваемой системе.

Обозначим вероятности

$$P_k(m, i, t) = P\{k(t) = k, m(t) = m, i(t) = i\}. \quad (2.55)$$

Случайный процесс $\{k(t), m(t), i(t)\}$ является марковским. Для распределения вероятностей (2.55) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_0(m, i, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + i\sigma)P_0(m, i, t) + \mu_2 P_2(m, i, t)\mu_2 + \sum_v P_0(v, i, t)q_{vm}, \\
\frac{\partial P_1(m, i, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \mu_1)P_1(m, i, t) + \lambda_m P_1(m, i-1, t) + \\
&+ \lambda_m P_0(m, i, t) + (i+1)\sigma P_0(m, i+1, t) + \mu_2 P_3(m, i, t) + \sum_v P_1(v, i, t)q_{vm}, \\
\frac{\partial P_2(m, i, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \mu_2 + i\sigma)P_2(m, i, t) + \\
&+ \mu_1 P_1(m, i, t) + \mu_1 P_3(m, i-1, t) + \sum_v P_2(v, i, t)q_{vm}, \\
\frac{\partial P_3(m, i, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \mu_1 + \mu_2 + i\sigma)P_3(m, i, t) + \\
&+ \lambda_m P_3(m, i-1, t) + \sum_v P_3(v, i, t)q_{vm}. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H_k(m, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(m, i, t). \tag{2.57}$$

Систему уравнений (2.56) перепишем для функций (2.57) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0(m, u, t)}{\partial t} &= -\lambda_m H_0(m, u, t) + \mu_2 H_2(m, u, t) + \sum_v H_0(v, u, t)q_{vm} + j\sigma \frac{\partial H_0(m, u, t)}{\partial u}, \\
\frac{\partial H_1(m, u, t)}{\partial t} &= \left(\lambda_m (e^{ju} - 1) - \mu_1 \right) H_1(m, u, t) + \\
&+ \lambda_m H_0(m, u, t) + \mu_2 H_3(m, u, t) + \sum_v H_1(v, u, t)q_{vm} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(m, u, t)}{\partial u}, \\
\frac{\partial H_2(m, u, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \mu_2) H_2(m, u, t) + \\
&+ \mu_1 H_1(m, u, t) + \mu_1 e^{ju} H_3(m, u, t) + \sum_v H_2(v, u, t)q_{vm} + j\sigma \frac{\partial H_2(m, u, t)}{\partial u},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_3(m, u, t)}{\partial t} = & \left(\lambda_m (e^{ju} - 1) - \mu_1 - \mu_2 \right) H_3(m, u, t) + \\ & + \sum_v H_3(v, u, t) q_{vm} + j\sigma \frac{\partial H_3(m, u, t)}{\partial u}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Для компактности дальнейших выкладок определим вектор-строки

$$\mathbf{H}_k(u, t) = \{H_k(1, u, t), H_k(2, u, t), \dots, H_k(M, u, t)\}, \quad m = \overline{1, M}, \quad (2.59)$$

и вектор строку

$$\mathbf{H}(u, t) = \{\mathbf{H}_0(u, t), \mathbf{H}_1(u, t), \mathbf{H}_2(u, t), \mathbf{H}_3(u, t)\},$$

блочные матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \Lambda & \Lambda & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} - (\Lambda + \mu_1 \mathbf{I}) & \mu_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mu_2 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{Q} - (\Lambda + \mu_2 \mathbf{I}) & \Lambda \\ \mathbf{O} & \mu_2 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{Q} - (\Lambda + \mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Lambda & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mu_1 \mathbf{I} & \Lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Здесь все блоки имеют размерность $M \times M$, \mathbf{O} – нулевой блок размерности $M \times M$. Используя указанные матрицы систему уравнений (2.58) для вектор-строки $\mathbf{H}(u, t)$ перепишем в компактном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t) \{ \mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} \} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1 \}. \quad (2.61)$$

Просуммируем все уравнения системы (2.61) домножением на единичный вектор столбец \mathbf{e} , размерности $4M$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} = \mathbf{H}(u, t) \{ \mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} \} \mathbf{e} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1 \} \mathbf{e}.$$

Учитывая $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e} = 0$ и $(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\mathbf{e} = 0$, получим скалярное равенство:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} = (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u, t) \mathbf{B} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e}.$$

Матричное уравнение (7) и полученное скалярное уравнение имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u,t) \{ \mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} \} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1 \}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} \mathbf{e} &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u,t) \mathbf{B} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e}.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Отметим тот факт, что система (2.62) для подобной тандемной системы M|M|M|1 с общей орбитой и простейшим входящим потоком с интенсивностью λ имеет такой же вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u,t) \{ \mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} \} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} \{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1 \}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} \mathbf{e} &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u,t) \mathbf{B} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} \mathbf{I}_1 \right\} \mathbf{e},\end{aligned}\quad (2.63)$$

где вектор $\mathbf{H}(u, t)$, матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{I}_0 , \mathbf{I}_1 имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(u,t) &= \{ H_0(u,t), H_1(u,t), H_2(u,t), H_3(u,t) \}, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1) & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.64)$$

Эти системы уравнений (2.62) и (2.63) являются основными в дальнейших исследованиях.

2.4 Многолинейные RQ-системы

В настоящее время облачные вычисления используют многие компании. Даже в повседневной деятельности мы используем множество видов сервисов совместного использования, основанных на облачных вычислениях, таких как Dropbox, Slack, Overleaf и т. д.

Облачные вычисления еще более важны при удаленной работе для значительной части нашего общества. Облачные вычисления поддерживаются центрами обработки данных, в которых доступно огромное количество серверов.

Эти серверы потребляют огромное количество энергии, поэтому экономия энергии имеет решающее значение для управления центрами обработки данных и облачных вычислений. Поскольку пользовательский трафик имеет пиковую и непиковую природу, желательно, чтобы больше ресурсов сервера выделялось в период пика, а меньше ресурсов выделялось в период не пика.

Кроме того, поскольку пользовательский трафик изменяется стохастически, необходимы такие политики управления, которые добавляют больше ресурсов, когда рабочая нагрузка велика, и освобождают ресурсы, когда рабочая нагрузка небольшая. Тот же механизм наблюдается и в сетях 5G с виртуализацией сетевых функций (NFV) [233, 239]. Исходя из этих ситуаций, было предложено множество механизмов энергосбережения [146, 147].

Одним из наиболее естественных механизмов является политика On-Off, при которой сервер выключается, если у него нет работы, и снова включается после получения задания. Однако, если сервер находится в состоянии Off, он не может быть активен сразу для обслуживания. Ему требуется время настройки, в течение которого сервер не может выполнить работу, но потребляет энергию. Эти модели являются достаточно сложными для исследования, поскольку описывающая систему цепь Маркова имеет неоднородную структуру.

Более того, в реальных системах запрос может быть заблокирован, если ресурс не выделен, то есть все серверы заняты во время прихода нового запроса. На практике, если запрос заблокирован, через некоторое время протокол переподключится. Это время является случайным и зависит от количества повторных попыток. В некоторых приложениях интервал повторных попыток удваивается для двух последовательных блокировок.

Большинство авторов рассматривают однолинейные системы с повторными вызовами и/или системы с повторными вызовами и экспоненциально распределенным временем обслуживания.

Рассмотрим многолинейные системы с повторными вызовами двух видов: N -линейную систему с запросами и гиперэкспоненциальным временем обслуживания и N -линейную систему с повторными вызовами и специальным обслуживанием. Гиперэкспоненциальное распределение оправдано тем, что таким распределением вероятностей неотрицательных случайных величин из достаточно широкого класса распределений.

2.4.1 RQ-система $M|H_2|N$

Рассмотрим N -линейную систему (рисунок 2.6) с повторными вызовами $M|H_2|N$, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , а время обслуживания случайное с гиперэкспоненциальной функцией распределения $B(x)$

$$B(x) = q_1(1 - e^{-\mu_1 x}) + q_2(1 - e^{-\mu_2 x}),$$

где $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $0 < q_1 < 1$, $q_1 + q_2 = 1$.

Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая хотя бы один из N приборов свободным, занимает его, а прибор начинает ее обслуживание в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает, что все приборы заняты, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ , после которой вновь обращается к обслуживающим приборам. Если хотя бы один из них свободен, то эта заявка реализует повторное (отложенное) обслуживание. Если в момент обращения заявки с орбиты вновь все приборы заняты, то обратившаяся к приборам заявка повторяет цикл экспоненциальной задержки на орбите.

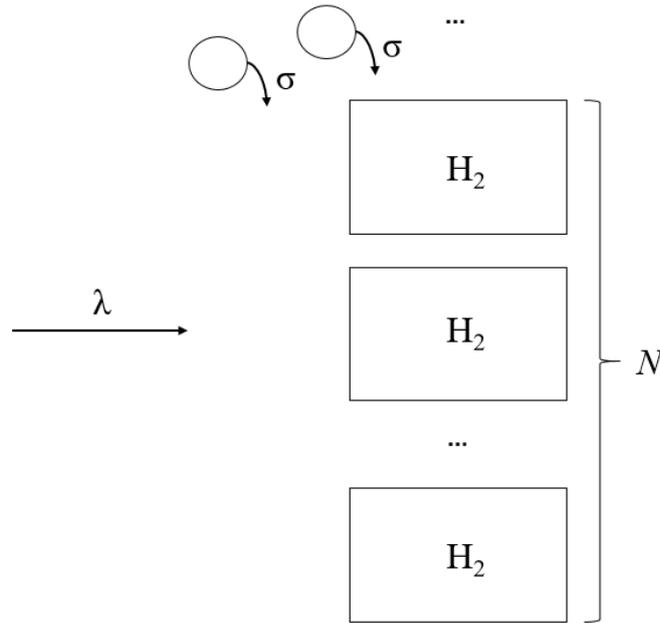


Рисунок 2.8 – N -линейная RQ-система $M|H_2|N$

Обозначим $n(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t , $n = \overline{0, N}$, $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t .

Ставится задача нахождения стационарного двумерного распределения вероятностей

$$P(n, i) = P\{n(t) = n, i(t) = i\}$$

числа занятых приборов и числа заявок на орбите в N -линейной системе $M|H_2|N$ с повторными вызовами.

Состояния предложенной системы в момент времени t определим трехмерным процессом $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок на орбите, $n_1(t), n_2(t)$ – число приборов, занятых на первой и второй фазах соответственно. Для трехмерного распределения вероятностей этого процесса

$$P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, i(t) = i\} = P(n_1, n_2, i, t),$$

будет составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова, которую перепишем для частичных характеристических функций. Найдя трехмерное распределение вероятностей $P(n_1, n_2, i, t)$ не трудно составить двумерное маргинальное распределение вероятностей

$$P(n, i, t) = \sum_{n_1=0}^n P(n_1, n - n_1, i, t) = \sum_{n_2=0}^n P(n - n_2, n_2, i, t).$$

Запишем равенства для трехмерного распределения:

при $n_1 + n_2 \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, i, t + \Delta t) = & (1 - \lambda \Delta t)(1 - n_1 \mu_1 \Delta t)(1 - n_2 \mu_2 \Delta t)(1 - i \sigma \Delta t) P(n_1, n_2, i, t) + \\ & + q_1 \lambda \Delta t P(n_1 - 1, n_2, i, t) + q_2 \lambda \Delta t P(n_1, n_2 - 1, i, t) + \\ & + q_1 (i + 1) \sigma \Delta t P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t) + q_2 (i + 1) \sigma \Delta t P(n_1, n_2 - 1, i + 1, t) + \\ & + (n_1 + 1) \mu_1 \Delta t P(n_1 + 1, n_2, i, t) + (n_2 + 1) \mu_2 \Delta t P(n_1, n_2 + 1, i, t) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

при $n_1 + n_2 = N$:

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, i, t + \Delta t) = & (1 - \lambda \Delta t)(1 - n_1 \mu_1 \Delta t)(1 - n_2 \mu_2 \Delta t) P(n_1, n_2, i, t) + \\ & + q_1 \lambda \Delta t P(n_1 - 1, n_2, i, t) + q_2 \lambda \Delta t P(n_1, n_2 - 1, i, t) + \lambda \Delta t P(n_1, n_2, i - 1, t) + \\ & + q_1 (i + 1) \sigma \Delta t P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t) + q_2 (i + 1) \sigma \Delta t P(n_1, n_2 - 1, i + 1, t) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

из которых получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

при $n_1 + n_2 \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n_1, n_2, i, t)}{\partial t} = & -(\lambda + n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 + i \sigma) P(n_1, n_2, i, t) + \\ & + q_1 \lambda P(n_1 - 1, n_2, i, t) + q_2 \lambda P(n_1, n_2 - 1, i, t) + \\ & + q_1 (i + 1) \sigma P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t) + q_2 (i + 1) \sigma P(n_1, n_2 - 1, i + 1, t) + \\ & + (n_1 + 1) \mu_1 P(n_1 + 1, n_2, i, t) + (n_2 + 1) \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, i, t), \end{aligned}$$

при $n_1 + n_2 = N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n_1, n_2, i, t)}{\partial t} = & -(\lambda + n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2) P(n_1, n_2, i, t) + \\ & + q_1 \lambda P(n_1 - 1, n_2, i, t) + q_2 \lambda P(n_1, n_2 - 1, i, t) + \lambda P(n_1, n_2, i - 1, t) + \\ & + q_1 (i + 1) \sigma P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t) + q_2 (i + 1) \sigma P(n_1, n_2 - 1, i + 1, t). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$

$$H(n_1, n_2, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P(n_1, n_2, i, t),$$

для которых систему уравнений (2.65) перепишем в виде:

при $n_1 + n_2 \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial t} = & -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) + \\ & + q_1\lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) + q_2\lambda H(n_1, n_2 - 1, u, t) + \\ & + (n_1 + 1)\mu_1 H(n_1 + 1, n_2, u, t) + (n_2 + 1)\mu_2 H(n_1, n_2 + 1, u, t) - \\ & - j\sigma q_1 e^{-ju} \frac{\partial H(n_1 - 1, n_2, u, t)}{\partial u} - j\sigma q_2 e^{-ju} \frac{\partial H(n_1, n_2 - 1, u, t)}{\partial u} + j\sigma \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial u}, \end{aligned}$$

при $n_1 + n_2 = N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial t} = & -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) + \\ & + q_1\lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) + q_2\lambda H(n_1, n_2 - 1, u, t) + \lambda e^{ju} H(n_1, n_2, u, t) - \\ & - j\sigma q_1 e^{-ju} \frac{\partial H(n_1 - 1, n_2, u, t)}{\partial u} - j\sigma q_2 e^{-ju} \frac{\partial H(n_1, n_2 - 1, u, t)}{\partial u}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Для компактности дальнейших записей определим линейные однородные конечно разностные операторы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{I}_0 , \mathbf{I}_1 двух дискретных переменных n_1 и n_2 , применяя которые систему уравнений (2.66) для матричной функции $\mathbf{H}(u, t) = \{H(n_1, n_2, u, t)\}$ перепишем в компактном виде, обозначив

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial t} \right\}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} = \left\{ \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial u} \right\}, \quad n_1 + n_2 \leq N.$$

Имеем

$$\mathbf{H}(u, t)\mathbf{A} = \begin{cases} -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) + q_1\lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) \\ + q_2\lambda H(n_1, n_2 - 1, u, t) + (n_1 + 1)\mu_1 H(n_1 + 1, n_2, u, t) \\ + (n_2 + 1)\mu_2 H(n_1, n_2 + 1, u, t), n_1 + n_2 \leq N - 1, \\ -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) \\ + q_1\lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) + q_2\lambda H(n_1, n_2 - 1, u, t), n_1 + n_2 = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(u, t)\mathbf{B} = \begin{cases} 0, n_1 + n_2 \leq N - 1, \\ \lambda H(n_1, n_2, u, t), n_1 + n_2 = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(u,t)\mathbf{I}_0 = \begin{cases} H(n_1, n_2, u, t), n_1 + n_2 \leq N - 1, \\ 0, n_1 + n_2 = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(u,t)\mathbf{I}_1 = q_1 H(n_1 - 1, n_2, u, t) + q_2 H(n_1, n_2 - 1, u, t),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1). \quad (2.67)$$

Вид операторов, очевидно, определяется предыдущей системой равенств. Здесь, аналогично произведению вектора строки на матрицу, операторы записаны справа от матричной функции, на которую они действуют. Определим оператор \mathbf{E} суммирования по всем значениям n_1 и n_2 дискретных переменных, удовлетворяющих условию $n_1 + n_2 \leq N$. Применяя этот оператор суммирования к равенству (2.67), получим скалярное уравнение, учитывая, что $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\mathbf{E} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} \mathbf{E} &= \mathbf{H}(u,t)(e^{ju} - 1)\mathbf{B}\mathbf{E} + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} (1 - e^{-ju})\mathbf{I}_0 \mathbf{E} = \\ &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u,t)\mathbf{B} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Таким образом, система (2.67) в операторном виде и полученное скалярное уравнение имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u,t)(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1), \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} \mathbf{E} &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u,t)\mathbf{B} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Эта система будет основной в дальнейших исследованиях.

2.4.2 RQ-система M|M, M|1 с двухфазным специальным обслуживанием

Рассмотрим RQ-систему (рисунок 2.9) с N обслуживающими приборами, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ .

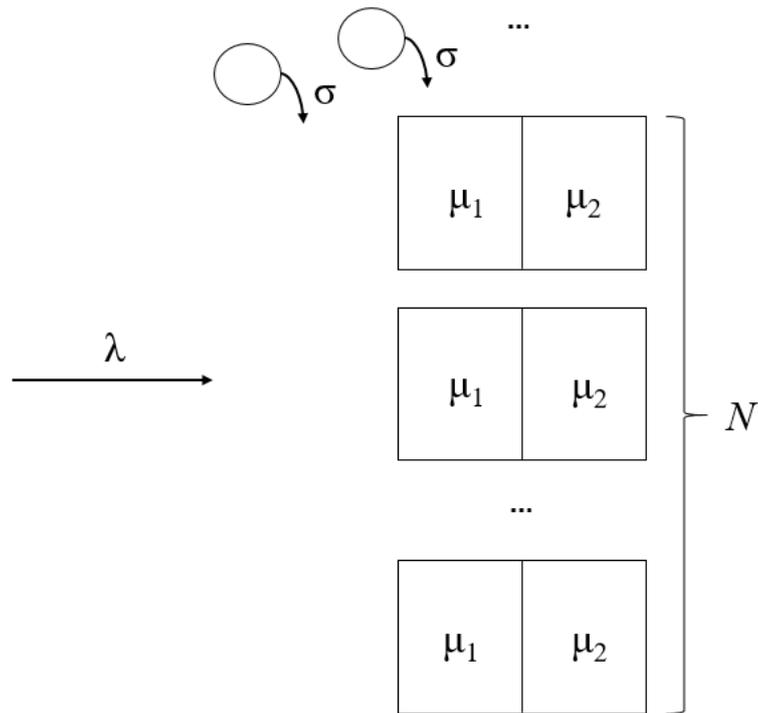


Рисунок 2.9 – N -линейная RQ-система $M|M, M|N$ со специальным обслуживанием

Заявка входящего потока, поступая в систему, занимает любой из свободных приборов. Обслуживание прибора разбито на две фазы. На первой фазе заявка обслуживается в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1 . После обслуживания на первой фазе, заявка мгновенно переходит на вторую фазу и обслуживается на ней в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_2 . Завершив обслуживание на второй фазе, заявка покидает систему.

Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает, что все приборы заняты на любой из двух фаз, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ .

Двухфазное обслуживание в рассматриваемой RQ-системе названо специальным потому, что оно обладает следующей особенностью.

Если в момент окончания обслуживания на второй фазе и освобождения прибора, в системе имеется хотя бы одна заявка, обслуживаемая на первой фазе, то она мгновенно переходит на освободившийся прибор и сразу начинает обслуживание

на второй фазе с интенсивностью μ_2 , тем самым сокращает свое полное двухфазное время обслуживания.

Обозначим: процесс $n_1(t)$ – число приборов, занятых на первой фазе; процесс $n_2(t)$ – число приборов, занятых на второй фазе; процесс $i(t)$ – число заявок на орбите.

Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$. Для распределения вероятностей

$$P\{n_1(t)=n_1, n_2(t)=n_2, i(t)=i\}=P(n_1, n_2, i, t)$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Запишем равенства при $n_1 + n_2 = 0$:

$$P(0, 0, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - i \sigma \Delta t)P(0, 0, i, t) + P(0, 1, i, t)\mu_2 \Delta t + o(\Delta t),$$

при $1 \leq n_1 + n_2 \leq N - 1$:

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, i, t + \Delta t) = & (1 - \lambda \Delta t)(1 - i \sigma \Delta t)(1 - n_1 \mu_1 \Delta t)(1 - n_2 \mu_2 \Delta t)P(n_1, n_2, i, t) + \\ & + P(n_1 + 1, n_2 - 1, i, t)(n_1 + 1)\mu_1 \Delta t + P(n_1 + 1, n_2, i, t)n_2 \mu_2 \Delta t + \\ & + P(n_1 - 1, n_2, i, t)\lambda \Delta t + P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t)(i + 1)\sigma \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

при $n_1 + n_2 = N$:

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, i, t + \Delta t) = & (1 - \lambda \Delta t)(1 - n_1 \mu_1 \Delta t)(1 - n_2 \mu_2 \Delta t)P(n_1, n_2, i, t) + \\ & + P(n_1 + 1, n_2 - 1, i, t)(n_1 + 1)\mu_1 \Delta t + P(n_1 - 1, n_2, i, t)\lambda \Delta t + \\ & + P(n_1, n_2, i - 1, t)\lambda \Delta t + P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t)(i + 1)\sigma \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(0, 0, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i \sigma)P(0, 0, i, t) + \mu_2 P(0, 1, i, t), \text{ при } n_1 + n_2 = 0,$$

$$\frac{\partial P(n_1, n_2, i, t)}{\partial t} = -(\lambda + i \sigma + n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2)P(n_1, n_2, i, t) +$$

$$+ (n_1 + 1)\mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, i, t) + n_2 \mu_2 P(n_1 + 1, n_2, i, t) +$$

$$+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, i, t) + (i + 1)\sigma P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t), \text{ при } 1 \leq n_1 + n_2 \leq N - 1,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(n_1, n_2, i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)P(n_1, n_2, i, t) + \\
&+ (n_1 + 1)\mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, i, t) + \lambda P(n_1 - 1, n_2, i, t) + \\
&+ \lambda P(n_1, n_2, i - 1, t) + (i + 1)\sigma P(n_1 - 1, n_2, i + 1, t), \text{ при } n_1 + n_2 = N.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Введем частичные характеристические функции

$$H(n_1, n_2, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_i} P(n_1, n_2, i, t),$$

тогда систему (2.69) перепишем в виде:

$$\frac{\partial H(0, 0, u, t)}{\partial t} = -\lambda H(0, 0, u, t) + \mu_2 H(0, 1, u, t) + j\sigma \frac{\partial H(0, 0, u, t)}{\partial u}, \text{ при } n_1 + n_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial t} &= -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) + \\
&+ (n_1 + 1)\mu_1 H(n_1 + 1, n_2 - 1, u, t) + n_2\mu_2 H(n_1 + 1, n_2, u, t) + \\
&+ \lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) + j\sigma \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial u} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(n_1 - 1, n_2, u, t)}{\partial u},
\end{aligned}$$

при $1 \leq n_1 + n_2 \leq N - 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial t} &= -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) + \\
&+ (n_1 + 1)\mu_1 H(n_1 + 1, n_2 - 1, u, t) + \lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) + \\
&+ \lambda e^{ju} H(n_1, n_2, u, t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(n_1 - 1, n_2, u, t)}{\partial u}, \text{ при } n_1 + n_2 = N.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Аналогично предыдущему разделу, для компактности дальнейших выкладок определим двумерные конечно-разностные операторы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{I}_0 , \mathbf{I}_1 двух дискретных переменных n_1 и n_2 :

$$\mathbf{H}(u,t)\mathbf{A} = \begin{cases} -\lambda H(0,0,u,t) + \mu_2 H(0,1,u,t), & n_1 + n_2 = 0, \\ -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) + \lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) + \\ + (n_1 + 1)\mu_1 H(n_1 + 1, n_2 - 1, u, t) + n_2\mu_2 H(n_1 + 1, n_2, u, t), & 1 \leq n_1 + n_2 \leq N - 1, \\ -(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)H(n_1, n_2, u, t) + \\ + \lambda H(n_1 - 1, n_2, u, t) + (n_1 + 1)\mu_1 H(n_1 + 1, n_2 - 1, u, t), & n_1 + n_2 = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(u,t)\mathbf{B} = \begin{cases} 0, & n_1 + n_2 \leq N - 1, \\ H(n_1, n_2, u, t), & n_1 + n_2 = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(u,t)\mathbf{I}_0 = \begin{cases} H(n_1, n_2, u, t), & n_1 + n_2 \leq N - 1, \\ 0, & n_1 + n_2 = N. \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(u,t)\mathbf{I}_1 = H(n_1 - 1, n_2, u, t).$$

Обозначив

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial t} \right\}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} = \left\{ \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial u} \right\}, \quad n_1 + n_2 \leq N,$$

Применяя указанные операторы систему уравнений (2.70) для матричной функции $\mathbf{H}(u, t) = \{H(n_1, n_2, u, t)\}$ перепишем в компактном виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)(\mathbf{A} + e^{ju}\lambda\mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1). \quad (2.71)$$

Просуммируем все уравнения системы (2.70), получим скалярное равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n_1+n_2 \leq N} H(n_1, n_2, u, t) \right) = \\ & = (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1+n_2=N} H(n_1, n_2, u, t) + e^{-ju} \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} j\sigma \frac{\partial H(n_1, n_2, u, t)}{\partial u} \right\}. \end{aligned}$$

Определим операторы суммирования \mathbf{E}_1 , по $n_1 + n_2 = N$ и \mathbf{E}_2 по $n_1 + n_2 \leq N - 1$, обозначив $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Применяя эти операторы суммирования к равенству (2.71), получим скалярное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}(u,t)\mathbf{E}) &= \mathbf{H}(u,t)(e^{ju} - 1)\lambda\mathbf{E}_1 + j\sigma(1 - e^{-ju}) \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{H}(u,t)\mathbf{E}_2) = \\ &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u,t)\lambda\mathbf{E}_1 + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{H}(u,t)\mathbf{E}_2) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, система (2.71) в операторном виде и полученное скалярное уравнение имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u, t) (\mathbf{A} + e^{ju} \lambda \mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}(u, t) \mathbf{E}) &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u, t) \lambda \mathbf{E}_1 + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{H}(u, t) \mathbf{E}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Эта система уравнений является основной в дальнейших исследованиях.

2.5 Резюме

В данной главе представлены RQ-системы различной конфигурации, а именно, RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками, ненадежным прибором, тандемные RQ-системы с общей орбитой, многолинейные RQ-системы. Для распределения вероятностей состояний процессов, описывающих функционирование систем, построены системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Для ряда RQ-систем удалось провести их исследование в допредельной ситуации и найти распределение вероятностей блока обслуживания и числа заявок на орбите в виде характеристической функции, определяющей распределение вероятностей обратным преобразованием Фурье.

Для остальных RQ-систем, рассмотренных в этой главе, получены системы уравнений для частичных характеристических функций, определяющих распределения вероятностей их состояний. Решение этих систем уравнений будет выполнено методами асимптотического и асимптотически-диффузионного анализа в Главах 3–5.

Для RQ-систем с ненадежным прибором и вызываемыми заявками были получены условия существования стационарного режима при дообслуживании заявок после поломок прибора и обслуживании прерванных заявок заново. Получены распределения вероятностей состояний прибора и найдена характеристическая функция числа заявок в системе при условии обслуживания прерванных заявок заново. Обнаружено нестационарное свойство, определяемое равенством (2.45), таких систем.

Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в работах автора [92, 51, 62, 49, 43, 174, 70, 71, 196, 216, 229].

Глава 3 Методы асимптотического анализа и их модификации

Исследования RQ-систем, рассмотренных в данной главе, достаточно широко представлены в литературе. В частности, для большого класса систем с повторными вызовами, с простейшим входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания (марковские RQ-системы) получены допредельные характеристики. RQ-системы с коррелированными входящими потоками и произвольным временем обслуживания заявок (немарковских RQ-систем), как правило, исследуются численно.

Обычно для анализа немарковских RQ-систем применяют метод дополнительной переменной, что достигается построением многомерных марковских процессов. Исследование таких процессов выполняется определением их распределений вероятностей, выводом уравнений Колмогорова и решением этих уравнений. Это позволяет найти совместное многомерное распределение вероятностей значений исследуемого процесса и той дополнительной переменной или переменных, которые вводятся. Далее, применяя условие согласованности многомерных распределений, можно найти одномерное маргинальное распределение вероятностей значений исследуемого процесса.

Так в RQ-системах с коррелированными входящими потоками для исследования процесса числа заявок на орбите нужно дополнить его компонентами, которые содержат необходимую информацию о входящем потоке. Например, для MMPP-потока это будет управляющий этим потоком процесс.

Методы, которые предлагаются в данной главе это модификации методов асимптотического анализа, которые представлены в [63] и широко применимы при анализе систем массового обслуживания различной конфигурации [14]. При реализации данных модификаций предлагаются оригинальные алгоритмы (подходы), которые определяются видом исследуемой математической модели.

Предложенные методы реализуются при исследовании систем массового обслуживания в различных предельных условиях, например, большой задержки заявок на орбите. При исследовании RQ-систем с вызываемыми заявками предложены новые асимптотические методы, реализованные в предельных условиях длительного обслуживания вызываемых заявок и высокой интенсивности вызывания заявок.

В настоящей главе представлены исследования RQ-систем с вызываемыми заявками, RQ-систем с ненадежным прибором, тандемных RQ-систем с общей орбитой, которые выполнены методами асимптотического анализа. Решается задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите в стационарном режиме функционирования систем.

3.1 Исследование RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками в различных асимптотических условиях

В предложенном разделе основными методами исследования являются методы асимптотического анализа, которые позволяют для RQ-системы $MMPP|M|1$ с N типами вызываемых заявок найти вид предельного распределения вероятностей числа заявок на орбите в различных асимптотических условиях.

3.1.1 Выбор предельного условия

В данном разделе будут рассмотрена RQ-система с MMPP входящим потоком, экспоненциальным временем обслуживания и разнотипными вызываемыми заявками. Для построенной математической модели выведена система дифференциальных уравнений Колмогорова. С помощью методов асимптотического анализа получены характеристические функции числа заявок на орбите в различных предельных условиях: согласованно высокой интенсивности вызывания заявок, согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок и большой задержки заявок на орбите. В каждом из вышеуказанных предельных условий будут построены аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите в соответствующей системе с использованием полученных асимптотических характеристик. С

помощью расстояния Колмогорова определена точность полученных аппроксимаций в сравнении с результатами численного или имитационного моделирования. Приведены численные примеры при различных наборах параметров исследуемых систем.

3.1.2 Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите

В этом разделе приведено исследование RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$). Применяя метод асимптотического анализа, мы получим асимптотические среднее и дисперсию числа заявок на орбите и докажем, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите является характеристической функцией гауссовской случайной величины.

В Главе 2 была получена система (2.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{H}_k(u) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_1(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{H}_0(u) \Lambda - j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_n(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{H}_0(u) &= 0, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned}$$

и вспомогательное уравнение (2.8)

$$j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_k(u) \Lambda \mathbf{e} = 0.$$

Асимптотика первого порядка. Обозначим $\sigma = \varepsilon$, в системе уравнений (2.7) и уравнении (2.8) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.1)$$

здесь ε – малый положительный параметр. Обозначение $\sigma = \varepsilon$ определяет асимптотическое условие большой задержки заявок на орбите, при выполнении которого число $i(t)$ заявок на орбите неограниченно возрастает. Для компенсации этого не-

ограниченного возрастания выполняется замена $u = \varepsilon w$. В силу определения характеристической функции $H(u) = \mathbf{H}(u)\mathbf{e}$ эта замена эквивалентна рассмотрению класса стационарных процессов $\sigma i(t)$.

Получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) + j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \Lambda - j e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) &= 0, \quad n = \overline{2, N}. \\ j e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) \Lambda \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение $\mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k(w), \quad k = \overline{0, N} \text{ и предел производной по } w \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}'_0(w).$$

Теорема 3.1 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе MMRP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jwi(t)\sigma} = e^{jw\kappa_1}, \quad (3.3)$$

где κ_1 является решением следующего уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \left\{ \mathbf{I} + (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I})(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1} \times \\ \times \left\{ -\kappa_1 \mathbf{I} + (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I})(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \Lambda \right\} \mathbf{e} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь вектор-строка \mathbf{r} – стационарное распределение вероятностей процесса $t(t)$, которое можем найти из системы уравнений: $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$; \mathbf{I} – единичная матрица, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец.

Доказательство. Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в системе (3.2)

$$\mathbf{F}_0(w) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k(w) + j \mathbf{F}'_0(w) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(w)(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{F}_0(w)\mathbf{\Lambda} - j\mathbf{F}'_0(w) &= 0, \\ \mathbf{F}_n(w)(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{F}_0(w) &= 0, n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$j\mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w)\mathbf{\Lambda e} = 0. \quad (3.6)$$

Решение системы (3.5) будем искать в виде

$$\mathbf{F}_k(w) = \Phi(w)\mathbf{r}_k, k = \overline{0, N} \quad (3.7)$$

где $\Phi(w)$ – скалярная характеристическая функция процесса $\sigma i(t)$ при $\sigma \rightarrow 0$. Здесь $\mathbf{r}_k, k = \overline{0, N}$ – векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора k и состояний m ММРР-потока. Подставляя (3.7) в систему (3.5)–(3.6), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{r}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k &= 0 \\ \mathbf{r}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_0 \mathbf{\Lambda} - j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{r}_0 &= 0, \\ \mathbf{r}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{r}_0 &= 0, n = \overline{2, N}, \\ j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \mathbf{\Lambda e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Так как отношение $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w , то скалярная функция $\Phi(w)$

имеет вид

$$\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Здесь $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_1$. Подставим это

значение в систему (3.8), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} + \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k &= 0, \\ \mathbf{r}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_0 (\mathbf{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{r}_0 = 0, n = \overline{2, N}, \quad (3.9)$$

$$-\kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (3.10)$$

Рассмотрим условие согласованности многомерных распределений для стационарного распределения вероятностей состояний прибора

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{r}_k = \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} – вектор стационарного распределения вероятностей цепи Маркова $k(t)$, управляющей входящим ММРР-поток, который удовлетворяет системе уравнений

$$\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{r}\mathbf{e} = 1.$$

Из второго и третьего уравнений системы (3.9) запишем выражения

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{r}_n = \alpha_n \mathbf{r}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, n = \overline{2, N}. \quad (3.12)$$

Подставляя полученные выражения (3.11) и (3.12) в условие согласованности, получим следующее уравнение

$$\mathbf{r}_0 \left\{ \mathbf{I} + (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\} = \mathbf{r},$$

откуда получим

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \left\{ \mathbf{I} + (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1}. \quad (3.13)$$

Теперь два равенства (3.11) и (3.12) подставим в скалярное уравнение (3.10), получим уравнение, которое определяет величину \mathbf{r}_0 :

$$\mathbf{r}_0 \left\{ -\kappa_1 \mathbf{I} + (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \Lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \Lambda \right\} \mathbf{e} = 0.$$

Подставляя сюда \mathbf{r}_0 из (3.13), получим уравнение для нахождения κ_1

$$\mathbf{r} \left\{ \mathbf{I} + (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ -\kappa_1 \mathbf{I} + (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I})(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \Lambda \right\} \mathbf{e} = 0,$$

которое совпадает с (3.4). **Теорема доказана.**

Асимптотика первого порядка или доказанная теорема 3.1 определяет лишь асимптотическое среднее значение κ_1 числа заявок на орбите в системе ММРР|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Для более детального исследования процесса $i(t)$ рассмотрим асимптотику второго порядка.

Асимптотика второго порядка. Для центрированного случайного процесса $i(t)$ рассмотрим частичные характеристические функции

$$\mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{H}_k(u) e^{-ju \frac{\kappa_1}{\sigma}}.$$

В системе (2.7) и уравнении (2.8) сделаем следующую замены

$$\mathbf{H}_k(u) = \exp\left(ju \frac{\kappa_1}{\sigma}\right) \mathbf{H}_k^{(2)}(u), \quad (3.14)$$

получим систему

$$\mathbf{H}_0^{(2)}(u) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{H}_k^{(2)}(u) + j\sigma \frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} = 0,$$

$$\mathbf{H}_1^{(2)}(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{H}_0^{(2)}(u) \left(\Lambda + \kappa_1 e^{-ju} \mathbf{I} \right) - j\sigma e^{-ju} \frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} = 0,$$

$$\mathbf{H}_n^{(2)}(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{H}_0^{(2)}(u) = 0, \quad n = \overline{2, N}, \quad (3.15)$$

$$j\sigma e^{-ju} \frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_k^{(2)}(u) \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (3.16)$$

Обозначим

$$\sigma = \varepsilon^2,$$

и сделаем замены в системе (3.15) и скалярном уравнении (3.16)

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon), \quad k = \overline{0, N}. \quad (3.17)$$

Аналогично асимптотике первого порядка обозначение $\sigma = \varepsilon^2$ определяет асимптотическое условие большой задержки заявок на орбите, при выполнении которого возрастают значения центрированного процесса $i(t) - \kappa_1/\sigma$. Для компенсации этого возрастания выполняется замена в (3.17) $u = \varepsilon w$, которая в силу равенства (3.15) эквивалентна рассмотрению класса процессов

$$\sigma \left(i(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma} \right),$$

для которых ниже будет показана сходимость по распределению при $\sigma \rightarrow 0$.

Отметим, что асимптотики первого и второго порядков рассматриваемого метода асимптотического анализа аналогичны закону больших чисел и центральной предельной теореме теории вероятностей.

Тогда получим систему

$$\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\Lambda + \kappa_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{I} \right) - \\ - j\varepsilon e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_n^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \quad n = \overline{2, N}, \quad (3.18)$$

$$j\varepsilon e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (3.19)$$

Решение $\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w)$, $k = \overline{0, N}$ и предел производной по w

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{d\mathbf{F}_0^{(2)}(w)}{dw}$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе MPPR|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками, то в контексте теоремы 3.1 выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sqrt{\sigma} \left(i(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma} \right)} = e^{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2}, \quad (3.20)$$

где κ_1 является решением уравнения (3.4), величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \kappa_1 \boldsymbol{\varphi}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}}{\mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \kappa_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{e} - \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}}. \quad (3.21)$$

Здесь векторы \mathbf{g}_k и $\boldsymbol{\varphi}_k$ определяются системами уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (\mathbf{g}_0 (\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\ \mathbf{g}_n &= \alpha_n \mathbf{g}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\ \mathbf{g}_0 \left(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\Lambda} - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 (\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) &= \\ &= \mathbf{r}_0 - \mu_1 \mathbf{r}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\ \sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_1 &= (\boldsymbol{\varphi}_0 (\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{r}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\ \boldsymbol{\varphi}_n &= (\alpha_n \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{r}_n \boldsymbol{\Lambda}) (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\ \boldsymbol{\varphi}_0 \left(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\Lambda} - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 (\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) &= \\ &= \mu_1 (\kappa_1 \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\Lambda}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^N \mu_n \mathbf{r}_n \boldsymbol{\Lambda} (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\ \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

\mathbf{I} – единичная матрица, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец; векторы \mathbf{r}_k , $k = \overline{0, N}$ – векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора k и состояний t ММРР-потока определяются равенствами (3.11)–(3.13).

Доказательство. Решение системы уравнений (3.18) будем искать в виде

$$\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi_2(w) (\mathbf{r}_k + j\varepsilon w \mathbf{f}_k) + O(\varepsilon^2), \quad k = \overline{0, N} \quad (3.24)$$

где $\Phi(w)$ – скалярная характеристическая функция процесса $\sqrt{\sigma} \left(i(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma} \right)$ при $\sigma \rightarrow 0$. Здесь \mathbf{r}_k , $k = \overline{0, N}$ – векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора k и состояний m ММРР-потока. Подставим разложение (3.24) в систему (3.18) и уравнение (3.19)

$$\begin{aligned}
& \left[\mathbf{r}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k \right] \Phi_2(w) + j\varepsilon \Phi_2'(w) \mathbf{r}_0 + \\
& + j\varepsilon w \left(\mathbf{f}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{f}_k \right) \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \\
& \left[\mathbf{r}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) \right] \Phi_2(w) - j\varepsilon \Phi_2'(w) \mathbf{r}_0 + \\
& j\varepsilon w \left[\mathbf{f}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_1 \Lambda - \kappa_1 \mathbf{r}_0 \right] \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \\
& \left[\mathbf{r}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{r}_0 \right] \Phi_2(w) + \\
& + j\varepsilon w \left[\mathbf{f}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{f}_0 + \mathbf{r}_n \Lambda \right] \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \quad n = \overline{2, N}, \\
& j\varepsilon \Phi_2'(w) \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \left(\sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \Lambda \mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} \right) \Phi_2(w) + \\
& + j\varepsilon w \left(\sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k \Lambda \mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} \right) \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Поделим уравнения на $jw\varepsilon\Phi_2(w)$ и, с учетом (3.9), (3.10) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned}
& \mathbf{f}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{f}_k + \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} \mathbf{r}_0 = 0, \\
& - \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} \mathbf{r}_0 + \mathbf{f}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_1 \Lambda - \kappa_1 \mathbf{r}_0 = 0, \\
& \mathbf{f}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{f}_0 + \mathbf{r}_n \Lambda = 0, \quad n = \overline{2, N}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

$$\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k \Lambda \mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0. \tag{3.27}$$

Так как отношение $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w , то скалярная функция $\Phi_2(w)$

имеет вид

$$\Phi_2(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Здесь $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$. Подставим это

значение в систему (3.26) и уравнение (3.27), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I}\right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{f}_k &= \kappa_2 \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{f}_0(\mathbf{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) &= \kappa_1 \mathbf{r}_0 - \kappa_2 \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda}, \\ \mathbf{f}_n(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{f}_0 &= -\mathbf{r}_n \mathbf{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$-\kappa_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = \kappa_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}. \quad (3.29)$$

Неоднородная система уравнений (3.28) аналогична однородной системе уравнений (3.9), следовательно, применяя принцип суперпозиции решений неоднородных систем линейных алгебраических уравнений, учитывая вырожденность матрицы системы, ранг которой на единицу меньше ее размерности, решение системы уравнений (3.28) можно записать в виде

$$\mathbf{f}_k = C \mathbf{r}_k + \kappa_2 \mathbf{g}_k + \boldsymbol{\varphi}_k, \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.30)$$

где C – константа, компоненты векторов вероятностей \mathbf{r}_k являются решением системы (3.9), а векторы \mathbf{g}_k и $\boldsymbol{\varphi}_k$ являются частными решениями неоднородной системы (3.28), удовлетворяющие условиям $\sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0$ и $\sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} = 0$.

Подставляя решение (3.30) в систему (3.28) и уравнение (3.29). Слагаемые, содержащие константу C уничтожаются. Объединяя коэффициенты при различных степенях κ_2 в системы получим две системы уравнений для нахождения векторов \mathbf{g}_k и $\boldsymbol{\varphi}_k$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{g}_k &= \mathbf{r}_0, \\
\mathbf{g}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{g}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) &= -\mathbf{r}_0, \\
\mathbf{g}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{g}_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \boldsymbol{\varphi}_k &= 0, \\
\boldsymbol{\varphi}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varphi}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) &= \kappa_1 \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 \Lambda, \\
\boldsymbol{\varphi}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \boldsymbol{\varphi}_0 &= -\mathbf{r}_n \Lambda, \quad n = \overline{2, N}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$-\kappa_1 (\kappa_2 \mathbf{g}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0) \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N (\kappa_2 \mathbf{g}_k + \boldsymbol{\varphi}_k) \Lambda \mathbf{e} = \kappa_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}. \tag{3.33}$$

Из систем уравнений (3.31) и (3.32) запишем следующие выражения

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= (\mathbf{g}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\
\mathbf{g}_n &= \alpha_n \mathbf{g}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\
\mathbf{g}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) &= \\
&= \mathbf{r}_0 - \mu_1 \mathbf{r}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1 &= (\boldsymbol{\varphi}_0 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_1 \Lambda - \kappa_1 \mathbf{r}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\
\boldsymbol{\varphi}_n &= (\alpha_n \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{r}_n \Lambda) (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\
\boldsymbol{\varphi}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 (\Lambda + \kappa_1 \mathbf{I}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n \alpha_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) &= \\
&= \mu_1 (\kappa_1 \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 \Lambda) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^N \mu_n \mathbf{r}_n \Lambda (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Учитывая условия $\sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0$ и $\sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} = 0$ определим однозначно решения

систем уравнений (3.34) и (3.35). Приводя подобные в уравнении (3.33), получим

κ_2 в явном виде

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \kappa_1 \varphi_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \varphi_k \Lambda \mathbf{e}}{\mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \kappa_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{e} - \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k \Lambda \mathbf{e}},$$

который совпадает с (3.21). **Теорема доказана.**

Теорема 3.2 показывает, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками в условии большой задержки заявок на орбите является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ , что позволяет для допредельного распределения построить аппроксимацию.

3.1.3 Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1|N с N типами вызываемых заявок в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызывания заявок

Теперь рассмотрим предложенную во второй главе RQ-систему MMPP|M|1|N с N типами вызываемых заявок в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызова заявок. Согласованность интенсивностей вызова заявок заключается в том, что интенсивности вызова заявок представляются в виде бесконечно малых величин одинаковой степени малости.

Представим параметры RQ-системы в виде $\alpha_n = \alpha \eta_n$ где $n = \overline{2, N}$, и запишем уравнения (2.7) и (2.8) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \alpha \sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{H}_k(u) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_1(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{H}_0(u) \Lambda - j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_n(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha \eta_n \mathbf{H}_0(u) &= 0, n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_k(u) \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (3.37)$$

В предложенных обозначениях предельное условие согласованно высокой интенсивности вызова заявок имеет вид $\alpha \rightarrow \infty$.

Асимптотика первого порядка. Обозначим $\alpha = 1/\varepsilon$, в системе уравнений (3.36) и уравнении (3.37) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \mathbf{H}_0(u) = \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon), \mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), k = \overline{1, N}, \quad (3.38)$$

здесь ε – малый положительный параметр. Обозначение $\alpha = 1/\varepsilon$ предельное условие высокой интенсивности вызывания заявок. Для компенсации этого неограниченного возрастания выполняется замена $u = \varepsilon w$. В силу определения характеристической функции $H(u) = \mathbf{H}(u)\mathbf{e}$ эта замена эквивалентна рассмотрению класса процессов $i(t) / \alpha$.

Получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \left(\varepsilon \mathbf{Q} - \varepsilon \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda} - j\sigma e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I} \right) + \eta_n \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) &= 0, n = \overline{2, N}. \\ j\sigma e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Решение $\mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k(w)$, $k = \overline{0, N}$ и предел производной по w

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}'_0(w).$$

Теорема 3.3 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе ММРР|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M e^{jw \frac{i(t)}{\alpha}} = e^{jw\kappa_1}, \quad (3.40)$$

где κ_1 является положительным решением следующего уравнения

$$\sigma \kappa_1 \mathbf{r} \left\{ \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \eta_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{r} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}, \quad (3.41)$$

Здесь вектор-строка \mathbf{r} – стационарное распределение вероятностей процесса $m(t)$, которое можем найти из системы уравнений: $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$; \mathbf{I} – единичная матрица, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец.

Доказательство. Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в системе (3.39)

$$-\sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{F}_0(w) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k(w) + j\sigma \mathbf{F}_0'(w) = 0,$$

$$\mathbf{F}_1(w)(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{F}_0(w)\mathbf{\Lambda} - j\mathbf{F}_0'(w) = 0,$$

$$\mathbf{F}_n(w)(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \eta_n \mathbf{F}_0(w) = 0, n = \overline{2, N}. \quad (3.42)$$

$$j\sigma \mathbf{F}_0'(w)\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} = 0. \quad (3.43)$$

Решение системы (3.42) будем искать в виде

$$\mathbf{F}_k(w) = \Phi(w)\mathbf{r}_k, k = \overline{0, N} \quad (3.44)$$

где $\Phi(w)$ – скалярная характеристическая функция процесса $i(t)/\alpha$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Здесь $\mathbf{r}_k, k = \overline{1, N}$ – векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора k и состояний m ММРР-потока. Здесь \mathbf{r}_0 не имеет вероятностного смысла и является вектором вспомогательных констант. Подставляя (3.44) в (3.42) и (3.43), получим

$$-\sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{r}_0 + j\sigma \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{r}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k = 0$$

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) - j\sigma \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{r}_0 = 0,$$

$$\mathbf{r}_n(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \eta_n \mathbf{r}_0 = 0, n = \overline{2, N},$$

$$j\sigma \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \mathbf{r} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = 0. \quad (3.45)$$

Здесь $\sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k = \mathbf{r}$ условие согласованности многомерных распределений, где вектор

\mathbf{r} является стационарным распределением вероятностей состояний цепи Маркова $m(t)$ и решением системы уравнений $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.

Так как отношение $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w , то скалярная функция $\Phi(w)$

имеет вид

$$\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Здесь отношение $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_1$. С

учетом полученного, систему уравнений (3.45) перепишем

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=2}^N \eta_n + \sigma\kappa_1\right)\mathbf{r}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k &= 0, \\ \mathbf{r}_1(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sigma\kappa_1 \mathbf{r}_0 &= 0, \\ \mathbf{r}_n(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \eta_n \mathbf{r}_0 &= 0, n = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$-\sigma\kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (3.47)$$

Из второго и третьего уравнений системы (3.46) запишем выражения

$$\mathbf{r}_1 = \sigma\kappa_1 \mathbf{r}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{r}_n = \eta_n \mathbf{r}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, n = \overline{2, N}. \quad (3.49)$$

Подставляя полученные выражения в условие согласованности, получим следующее уравнение

$$\sigma\kappa_1 \mathbf{r}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{r}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{r},$$

откуда получим

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \left\{ \sigma\kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \eta_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1}. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.50) в уравнение (3.47), получим уравнение относительно искомого неизвестного параметра κ_1

$$\sigma\kappa_1 \mathbf{r} \left\{ \sigma\kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \eta_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{r} \Lambda \mathbf{e},$$

которое совпадает с (3.41). Теорема доказана.

Теорема 3.3 определяет асимптотическое среднее значение κ_1 числа заявок на орбите в RQ-системе $\text{MMPP}|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызова заявок. Для более детального исследования случайного процесса $i(t)$, перейдем к асимптотике второго порядка.

Асимптотика второго порядка. Для центрированного случайного процесса $i(t)$ рассмотрим частичные характеристические функции

$$\mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{H}_k(u) e^{-ju\alpha\kappa_1}.$$

В системе (3.36) и уравнении (3.37) сделаем следующую замену

$$\mathbf{H}_k(u) = \exp(ju\alpha\kappa_1) \mathbf{H}_k^{(2)}(u), \quad (3.51)$$

получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^{(2)}(u) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \alpha \sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{I} - \sigma \alpha \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{H}_k^{(2)}(u) + j\sigma \frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} &= 0, \\ \mathbf{H}_1^{(2)}(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{H}_0^{(2)}(u) \left(\mathbf{\Lambda} + \sigma \alpha \kappa_1 e^{-ju} \mathbf{I} \right) - j\sigma e^{-ju} \frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} &= 0, \\ \mathbf{H}_n^{(2)}(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha \eta_n \mathbf{H}_0^{(2)}(u) &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$j\sigma e^{-ju} \frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} \mathbf{e} - \sigma \alpha \kappa_1 e^{-ju} \mathbf{H}_0^{(2)}(u) \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_k^{(2)}(u) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = 0. \quad (3.53)$$

Обозначим

$$\alpha = 1/\varepsilon^2,$$

и сделаем замены в системе (3.15) и скалярном уравнении (3.16)

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_0^{(2)}(u) = \varepsilon^2 \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon), \quad \mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon), \quad k = \overline{1, N}. \quad (3.54)$$

Отметим, что асимптотики первого и второго порядков рассматриваемого метода асимптотического анализа аналогичны закону больших чисел и центральной предельной теореме теории вероятностей.

Тогда получим систему

$$\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\varepsilon^2 \mathbf{Q} - \varepsilon^2 \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) + j\sigma \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0,$$

$$\mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\varepsilon^2 \mathbf{\Lambda} + \sigma \kappa_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{I} \right) - j\sigma \varepsilon e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0,$$

$$\mathbf{F}_n^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I} \right) + \eta_n \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \quad n = \overline{2, N}, \quad (3.55)$$

$$j\sigma \varepsilon e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} - \sigma \kappa_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = 0. \quad (3.56)$$

Решение $\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w)$, $k = \overline{0, N}$ и предел производной по w

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{d\mathbf{F}_0^{(2)}(w)}{dw}. \text{ Докажем следующую теорему.}$$

Теорема 3.4 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе MMRP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками, то в контексте теоремы 3.3 выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M e^{jw \left(\frac{i(t) - \alpha \kappa_1}{\sqrt{\alpha}} \right)} = e^{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2}, \quad (3.57)$$

где κ_1 является решением уравнения (3.41), величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{\sigma \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \sigma \kappa_1 \boldsymbol{\varphi}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}}{\sigma \left(\mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \sigma \kappa_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{e} - \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \right)}. \quad (3.58)$$

Здесь векторы \mathbf{g}_k и $\boldsymbol{\varphi}_k$ определяются системами уравнений:

$$\mathbf{g}_1 = (\sigma \kappa_1 \mathbf{g}_0 + \mathbf{r}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1},$$

$$\mathbf{g}_n = \eta_n \mathbf{g}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 \left(-\sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} + \sigma \mu_1 \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n \eta_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\ = \mathbf{r}_0 - \mu_1 \mathbf{r}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0. \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1 &= (\sigma\kappa_1\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{r}_1\boldsymbol{\Lambda} - \sigma\kappa_1\mathbf{r}_0)(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\
\boldsymbol{\varphi}_n &= (\eta_n\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{r}_n\boldsymbol{\Lambda})(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\
\boldsymbol{\varphi}_0 &\left(-\sum_{n=2}^N \eta_n\mathbf{I} - \sigma\kappa_1\mathbf{I} + \sigma\kappa_1\mu_1(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n\eta_n(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\
&= \sigma\kappa_1\mu_1\mathbf{r}_0(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^N \mu_n\mathbf{r}_n\boldsymbol{\Lambda}(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\
&\sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} = 0. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Векторы \mathbf{r}_k , $k = \overline{0, N}$ – векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора k и состояний t ММРР-потока определяются равенствами (3.48)–(3.50), \mathbf{I} – единичная матрица, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец;

Доказательство. Решение системы уравнений (3.55) будем искать в виде разложения

$$\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi_2(w)(\mathbf{r}_k + j\varepsilon w \mathbf{f}_k) + O(\varepsilon^2), \quad k = \overline{0, N} \tag{3.61}$$

где $\Phi_2(w)$ – скалярная характеристическая функция процесса $\frac{i(t) - \alpha\kappa_1}{\sqrt{\alpha}}$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Здесь \mathbf{r}_k , $k = \overline{1, N}$ – векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора k и состояний t ММРР-потока. Подставим разложение (3.61) в систему (3.55) и уравнение (3.56)

$$\begin{aligned}
&\left[-\left(\sum_{n=2}^N \eta_n + \sigma\kappa_1 \right) \mathbf{r}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k \right] \Phi_2(w) + j\sigma\varepsilon\Phi_2'(w)\mathbf{r}_0 + \\
&+ j\varepsilon w \left[-\left(\sum_{n=2}^N \eta_n + \sigma\kappa_1 \right) \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{f}_k \right] \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \\
&\left[\mathbf{r}_1(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) + \sigma\kappa_1\mathbf{r}_0 \right] \Phi_2(w) - j\sigma\varepsilon\Phi_2'(w)\mathbf{r}_0 + \\
&j\varepsilon w \left[\mathbf{f}_1(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) + \sigma\kappa_1\mathbf{f}_0 + \mathbf{r}_1\boldsymbol{\Lambda} - \sigma\kappa_1\mathbf{r}_0 \right] \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \\
&\left[\mathbf{r}_n(\mathbf{Q} - \mu_n\mathbf{I}) + \eta_n\mathbf{r}_0 \right] \Phi_2(w) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + j\varepsilon w \left[\mathbf{f}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \eta_n \mathbf{f}_0 + \mathbf{r}_n \boldsymbol{\Lambda} \right] \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \quad n = \overline{2, N}, \\
& \quad j\sigma\varepsilon \Phi_2'(w) \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + (\mathbf{r}_1 \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} - \sigma \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}) \Phi_2(w) + \\
& \quad + j\varepsilon w \left(\sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} - \sigma \kappa_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \sigma \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} \right) \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2). \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Поделим уравнения на $jw\varepsilon\Phi_2(w)$ и, с учетом (3.46) и (3.47), в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{n=2}^N \eta_n + \sigma \kappa_1 \right) \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{f}_k + \sigma \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} \mathbf{r}_0 = 0, \\
& -\sigma \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} \mathbf{r}_0 + \mathbf{f}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sigma \kappa_1 \mathbf{f}_0 + \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\Lambda} - \sigma \kappa_1 \mathbf{r}_0 = 0, \\
& \quad \mathbf{f}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \eta_n \mathbf{f}_0 + \mathbf{r}_n \boldsymbol{\Lambda} = 0, \quad n = \overline{2, N}, \quad (3.63)
\end{aligned}$$

$$\sigma \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} - \sigma \kappa_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \sigma \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0. \quad (3.64)$$

Так как отношение $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w , то скалярная функция $\Phi(w)$

имеет вид

$$\Phi_2(w) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Здесь $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$. Подставим это

значение в систему (3.26) и уравнение (3.27), тогда

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{n=2}^N \eta_n + \sigma \kappa_1 \right) \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{f}_k = \sigma \kappa_2 \mathbf{r}_0, \\
& \sigma \kappa_1 \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) = \sigma \kappa_1 \mathbf{r}_0 - \sigma \kappa_2 \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\Lambda}, \\
& \quad \mathbf{f}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \eta_n \mathbf{f}_0 = -\mathbf{r}_n \boldsymbol{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N}, \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$-\sigma \kappa_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} = \sigma \kappa_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \sigma \kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}. \quad (3.66)$$

Неоднородная система уравнений (3.65) аналогична однородной системе уравнений (3.46), следовательно, применяя принцип суперпозиции решений неоднородных систем линейных алгебраических уравнений, учитывая вырожденность матрицы системы, ранг которой на единицу меньше ее размерности, решение системы уравнений (3.65) можно записать в виде

$$\mathbf{f}_k = C\mathbf{r}_k + \kappa_2\mathbf{g}_k + \boldsymbol{\varphi}_k, \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.67)$$

где C – константа, компоненты векторов вероятностей \mathbf{r}_k являются решением системы (3.46), а векторы \mathbf{g}_k и $\boldsymbol{\varphi}_k$ являются частными решениями неоднородной системы (3.65), удовлетворяющие условиям $\sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0$ и $\sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} = 0$. Подставляя решение (3.67) в систему (3.65) и уравнение (3.66). Слагаемые, содержащие константу C , уничтожаются. Объединяя коэффициенты при различных степенях κ_2 в системе получим две системы уравнений для нахождения векторов \mathbf{g}_k и $\boldsymbol{\varphi}_k$

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=2}^N \eta_n + \sigma\kappa_1\right)\mathbf{g}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{g}_k &= \mathbf{r}_0, \\ \sigma\kappa_1\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) &= -\mathbf{r}_0, \\ \mathbf{g}_n(\mathbf{Q} - \mu_n\mathbf{I}) + \gamma_n\mathbf{g}_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{n=2}^N \eta_n + \sigma\kappa_1\right)\boldsymbol{\varphi}_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \boldsymbol{\varphi}_k &= 0, \\ \sigma\kappa_1\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) &= \sigma\kappa_1\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\boldsymbol{\Lambda}, \\ \boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{Q} - \mu_n\mathbf{I}) + \gamma_n\boldsymbol{\varphi}_0 &= -\mathbf{r}_n\boldsymbol{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Из систем уравнений (3.68) и (3.69) запишем следующие выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (\sigma\kappa_1\mathbf{g}_0 + \mathbf{r}_0)(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\ \mathbf{g}_n &= \eta_n\mathbf{g}_0(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\ \mathbf{g}_0 \left(-\sum_{n=2}^N \eta_n\mathbf{I} - \sigma\kappa_1\mathbf{I} + \sigma\mu_1\kappa_1(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n\eta_n(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) &= \\ &= \mathbf{r}_0 - \mu_1\mathbf{r}_0(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1 &= (\sigma\kappa_1\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{r}_1\boldsymbol{\Lambda} - \sigma\kappa_1\mathbf{r}_0)(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\
\boldsymbol{\varphi}_n &= (\eta_n\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{r}_n\boldsymbol{\Lambda})(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\
\boldsymbol{\varphi}_0 &\left(-\sum_{n=2}^N \eta_n\mathbf{I} - \sigma\kappa_1\mathbf{I} + \sigma\kappa_1\mu_1(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^N \mu_n\eta_n(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\
&= \sigma\kappa_1\mu_1\mathbf{r}_0(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^N \mu_n\mathbf{r}_n\boldsymbol{\Lambda}(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \tag{3.71}
\end{aligned}$$

Учитывая условия $\sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0$ и $\sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} = 0$ определим однозначно решения систем уравнений (3.70) и (3.71). Приводя подобные в уравнении (3.66), получим явное выражение для κ_2

$$\kappa_2 = \frac{\sigma\kappa_1\mathbf{r}_0\mathbf{e} - \sigma\kappa_1\boldsymbol{\varphi}_0\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}}{\sigma\left(\mathbf{r}_0\mathbf{e} + \sigma\kappa_1\mathbf{g}_0\mathbf{e} - \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}\right)},$$

который совпадает с (3.58). **Теорема доказана.**

Теорема 3.4 показывает, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызывания заявок является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием $\alpha\kappa_1$ и дисперсией $\alpha\kappa_2$. Это позволит построить аппроксимацию для допредельного распределения.

3.1.4 Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок

Рассмотрим предложенную модель RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок. Согласованность длительностей обслуживания заключается в том, что параметры представляются в виде бесконечно малых величин одинаковой

степени малости. Представим параметры системы в виде $\mu_n = \mu\eta_n$, $n = \overline{2, N}$ и запишем систему (2.7) и уравнение (2.8) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \mu_1 \mathbf{H}_1(u) + \mu \sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{H}_n(u) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_1(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{H}_0(u) \Lambda - j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_n(u) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \Lambda - \mu \eta_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{H}_0(u) &= 0, n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$j\sigma e^{-ju} \mathbf{H}'_0(u) \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_k(u) \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (3.73)$$

В предложенных обозначениях предельное условие согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок имеет вид $\mu \rightarrow 0$.

Асимптотика первого порядка. Обозначим $\mu = \varepsilon$, в системе уравнений (3.72) и уравнении (3.73) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \mathbf{H}_0(u) = \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon), \mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), k = \overline{1, N}, \quad (3.74)$$

Получим систему

$$\varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \mu_1 \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{n=2}^N \eta_n \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0,$$

$$\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \Lambda - j\sigma e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0,$$

$$\mathbf{F}_n(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \Lambda - \varepsilon \eta_n \mathbf{I} \right) + \varepsilon \alpha_n \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) = 0, n = \overline{2, N}. \quad (3.75)$$

$$j\sigma e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) \Lambda \mathbf{e} = 0. \quad (3.76)$$

Решение $\mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k(w)$, $k = \overline{0, N}$ и предел производной по w

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}'_0(w).$$

Теорема 3.5 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M e^{j\omega \mu_i(t)} = \frac{1}{v_1} \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\eta_n - j\omega \rho \mu_1} \prod_{k=2}^N \left(1 - j\omega \frac{\rho \mu_1}{\eta_k} \right)^{-\frac{\alpha_k}{\sigma(1-\rho)}}, \quad (3.77)$$

где

$$v_1 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\eta_n}, \quad \rho = \frac{\mathbf{r}\Lambda\mathbf{e}}{\mu_1}. \quad (3.78)$$

Здесь вектор-строка \mathbf{r} – стационарное распределение вероятностей процесса $m(t)$, которое определяется системой: $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$; \mathbf{I} – единичная матрица, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец.

Доказательство. Рассмотрим уравнения системы (3.75) и уравнение (3.76) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mu_1 \mathbf{F}_1(w) + j\sigma \mathbf{F}'_0(w) = 0,$$

$$\mathbf{F}_1(w)(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) - j\sigma \mathbf{F}'_0(w) = 0,$$

$$\mathbf{F}_n(w)\mathbf{Q} = 0, \quad n = \overline{2, N}. \quad (3.79)$$

$$j\sigma \mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w)\Lambda\mathbf{e} = 0. \quad (3.80)$$

Складывая первое и второе уравнения системы (3.79), получим выражения

$$\mathbf{F}_1(w)\mathbf{Q} = 0,$$

$$\mathbf{F}_n(w)\mathbf{Q} = 0, \quad n = \overline{2, N}, \quad (3.81)$$

с учетом которых запишем функции $F_k(w)$ в следующем виде:

$$\mathbf{F}_k(w) = \Phi_k(w)\mathbf{r}, \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.82)$$

где $\Phi_k(w)$ – скалярные характеристические функции при $\mu \rightarrow 0$. Далее подставим полученное разложение в уравнение (3.80)

$$j\sigma \mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \Phi_k(w)\mathbf{r}\Lambda\mathbf{e} = 0.$$

Обозначим $\rho = \frac{\mathbf{r}\Lambda\mathbf{e}}{\mu_1}$, тогда уравнение примет вид

$$j\sigma \mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e} + \rho\mu_1 \sum_{k=1}^N \Phi_k(w) = 0,$$

откуда выразим искомую функцию $\Phi(w) = \sum_{k=1}^N \Phi_k(w)$

$$\Phi(w) = -\frac{j\sigma \mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e}}{\rho\mu_1}. \quad (3.83)$$

Домножим первое уравнение системы (3.79) на единичный вектор \mathbf{e} и получим соотношение

$$\mathbf{F}_1(w)\mathbf{e} = -\frac{j\sigma}{\mu_1} \mathbf{F}'_0(w)\mathbf{e},$$

откуда, с учетом (3.83), имеем равенство

$$\mathbf{F}_1(w)\mathbf{e} = \rho\Phi(w),$$

тогда можем также записать

$$\sum_{n=2}^N \mathbf{F}_n(w)\mathbf{e} = \sum_{n=2}^N \Phi_n(w) = (1-\rho)\Phi(w). \quad (3.84)$$

В третьем уравнении системы (3.75) разложим экспоненты в ряд Тейлора и домножим на вектор \mathbf{e} справа, разделим уравнение на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{F}_n(w)(jw\Lambda - \eta_n \mathbf{I})\mathbf{e} + \alpha_n \mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = 0, n = \overline{2, N}.$$

Подставляя в уравнение разложение (3.82), получим

$$\Phi_n(w)(jw\rho\mu_1 - \eta_n) + \alpha_n \mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = 0, n = \overline{2, N}.$$

Обозначим $\mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = \varphi(w)$ и запишем выражение

$$\Phi_n(w) = \frac{\alpha_n \varphi(w)}{\eta_n - jw\rho\mu_1} = 0, n = \overline{2, N}$$

Суммируя полученные выражения по n , получим

$$(1-\rho)\Phi(w) = \sum_{n=2}^N \Phi_n(w) = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n \varphi(w)}{\eta_n - jw\rho\mu_1},$$

откуда

$$\Phi(w) = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n \varphi(w)}{(1-\rho)(\eta_n - jw\rho\mu_1)}. \quad (3.85)$$

Запишем

$$\Phi(w) = \sum_{n=2}^N \frac{\rho\alpha_n \varphi(w)}{(1-\rho)(\eta_n - jw\rho\mu_1)},$$

и подставим полученное выражение в первое уравнение системы (2.79), домножая его справа на вектор \mathbf{e}

$$j\sigma\varphi'(w) + \sum_{n=2}^N \frac{\rho\alpha_n \varphi(w)}{(1-\rho)(\eta_n - jw\rho\mu_1)} = 0. \quad (3.86)$$

Решение $\varphi(w)$ дифференциального уравнения (3.86)

$$\varphi(w) = C \prod_{n=2}^N \left(1 - jw \frac{\rho\mu_1}{\eta_n} \right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}}, \quad (3.87)$$

где C – константа интегрирования, которая будет определена далее. Теперь из (3.85) можем записать

$$\Phi(w) = C \prod_{n=2}^N \left(1 - jw \frac{\rho\mu_1}{\eta_n} \right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}} \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{(1-\rho)(\eta_n - jw\rho\mu_1)}.$$

Константу интегрирования C определим из условия $\Phi(0) = 1$, запишем функцию $\Phi(w)$ в явном виде

$$\Phi(w) = \frac{1}{v_3} \prod_{n=2}^N \left(1 - jw \frac{\rho\mu_1}{\eta_n} \right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}} \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\eta_n - jw\rho\mu_1}, \quad \text{где } v_3 = \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\eta_n},$$

который совпадает с (3.77). **Теорема доказана.**

3.1.5 Точность аппроксимаций распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками

Построим аппроксимации распределений вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками на основе полученных асимптотических характеристик систем, а также определим границы применимости аппроксимаций. Для сравнения двух распределений вероятностей предлагается использовать расстояние Колмогорова вида

$$\Delta = \max_{0 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P_{im}(i) - P_{app}(i)) \right| \quad (3.88)$$

где $P_{im}(i)$ – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное с помощью имитационного моделирования, а $P_{app}(i)$ – аппроксимация того же распределения вероятностей, построенная на основе полученных асимптотических характеристик исследуемой системы.

В теоремах 3.1 и 3.2 показано, что предельное распределение вероятностей числа заявок на орбите в исследуемой системе является гауссовским с математическим ожиданием κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ . Чтобы перейти от непрерывного распределения вероятностей к дискретному, воспользуемся формулой

$$P_{app}(i) = \frac{F(i+0.5) - F(i-0.5)}{1 - F(-0.5)}, \quad (3.89)$$

здесь $F(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами κ_1/σ и $\sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}$.

Примем в качестве порогового значения $\Delta = 0.05$. Если расстояние Колмогорова Δ принимает значение не более 0.05, то будем говорить, что аппроксимация вполне приемлема, если $\Delta \leq 0.03$, то аппроксимацию будем называть достаточно точной, а если $\Delta \leq 0.01$, то назовем ее сверхточной.

Зададим $N = 4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, таким образом в системе три типа вызываемых заявок.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & -1.5 & 1 \\ 0.8 & 1.2 & -2 \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

Зададим матрицу $\mathbf{\Lambda}$ в следующем виде

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{\rho \mu_1 \mathbf{\Lambda}_1}{\mathbf{r} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{e}}, \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

ρ – параметр загрузки системы, значение которого определяет значение интенсивности входящего потока. Таким образом, варьируя параметр ρ загрузки системы,

мы можем задать такую матрицу Λ , элементы которой будут удовлетворять условию существования стационарного режима в системе. Вектор \mathbf{r} является решением системы уравнений $\mathbf{rQ} = 0$, $\mathbf{re} = 1$.

Таблица 3.1 – Расстояние Колмогорова

Δ	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$
$\rho = 0.5$	0.068	0.049	0.032	0.014
$\rho = 0.6$	0.079	0.058	0.039	0.018
$\rho = 0.7$	0.099	0.079	0.041	0.027

Из данных, представленных в таблице 3.1, можем заключить, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и уменьшается с ростом загрузки системы. Полу жирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой и достаточно точной.

В теоремах 3.3 и 3.4 показано, что предельное распределение вероятностей числа заявок на орбите в исследуемой системе является гауссовским с математическим ожиданием αk_1 и дисперсией αk_2 . Чтобы перейти от непрерывного распределения вероятностей к дискретному, воспользуемся формулой (3.89), где $F(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами αk_1 и дисперсией αk_2 . Примем в качестве порогового значения $\Delta = 0.05$. Зададим также $N = 4$, $\sigma = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\eta_2 = 1$, $\eta_3 = 2$, $\eta_4 = 3$, матрицы \mathbf{Q} и Λ в виде (3.90) и (3.91) соответственно.

Таблица 3.2 – Расстояние Колмогорова

Δ	$\alpha = 3$	$\alpha = 5$	$\alpha = 10$	$\alpha = 50$
$\rho = 0.2$	0.057	0.038	0.022	0.012
$\rho = 0.5$	0.096	0.067	0.051	0.026
$\rho = 0.7$	0.146	0.122	0.086	0.027

Из данных, представленных в таблице 3.2, можем заключить, что точность аппроксимации растет с ростом параметра α и уменьшается с ростом загрузки системы. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой и достаточно точной.

В теореме 3.5 показано, что предельная характеристическая функция $H(u)$ числа заявок на орбите в исследуемой системе имеет вид (3.77). Чтобы перейти от характеристической функции к распределению вероятностей, воспользуемся формулой

$$P_{app}(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju} H(u) du.$$

Примем в качестве порогового значения $\Delta = 0.05$. Зададим $N = 4$, $\sigma = 1$, $\mu_1 = 1$, $\eta_2 = 2$, $\eta_3 = 3$, $\eta_4 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, матрицы \mathbf{Q} и $\mathbf{\Lambda}$ в виде (3.90) и (3.91) соответственно.

Таблица 3.3 – Расстояние Колмогорова

Δ	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.03$	$\mu = 0.01$
$\rho = 0.5$	0.098	0.053	0.035	0.015
$\rho = 0.6$	0.118	0.057	0.044	0.017
$\rho = 0.7$	0.167	0.096	0.063	0.018

Из данных, представленных в таблице 3.3 можем заключить, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра μ и уменьшается с ростом загрузки системы. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой и достаточно точной.

3.2 Исследование RQ-систем M|M|1 с несколькими типами вызываемых заявок и ненадежным прибором

Для получения распределения вероятностей числа заявок на орбите в системе M|M|1 с повторными вызовами, несколькими типами вызываемых заявок и ненадежным прибором рассмотрим систему уравнений (2.23), которую будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$.

3.2.1 Асимптотический анализ RQ-системы M|M|1 с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором в предельном условии большой задержки заявок на орбите

Асимптотика первого порядка. Обозначим $\sigma = \varepsilon$, сделаем замены

$$u = \varepsilon w, H_k(u) = F_k(w, \varepsilon).$$

Получим систему

$$\begin{aligned} -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right) F_0(w, \varepsilon) + jF_0'(w, \varepsilon) + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k(w, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}(w, \varepsilon) &= 0, \\ (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) F_1(w, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \varepsilon) - j e^{-j\varepsilon w} F_0'(w, \varepsilon) &= 0, \\ (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_n) F_n(w, \varepsilon) + \alpha_n F_0(w, \varepsilon) &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\ (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \gamma_2) F_{N+1}(w, \varepsilon) + \gamma_0 F_0(w, \varepsilon) + \gamma_1 e^{j\varepsilon w} F_1(w, \varepsilon) &= 0, \\ j e^{-j\varepsilon w} F_0'(w, \varepsilon) + (\lambda + \gamma_1) F_1(w, \varepsilon) + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} F_n(w, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Решение $F_k(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k(w, \varepsilon) = F_k(w), \quad k = \overline{0, N} \text{ и предел производной по } w \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = F_0'(w).$$

Теорема 3.6 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе M|M|1 с несколькими типами вызываемых заявок и ненадежным прибором, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jwi(t)\sigma} = e^{jw\kappa_1}, \quad (3.93)$$

где κ_1 определяется равенством

$$\kappa_1 = \frac{\lambda \left(\gamma_2 (\lambda + \gamma_1) + \lambda \gamma_1 + \gamma_0 (\mu_1 + \gamma_1) + \gamma_2 (\mu_1 + \gamma_1) \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right)}{\gamma_2 \mu_1 - \lambda (\gamma_1 + \gamma_2)}. \quad (3.94)$$

Доказательство. В системе (3.92) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right) F_0(w) + jF_0'(w) + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k(w) + \gamma_2 F_{N+1}(w) &= 0, \\ -(\mu_1 + \gamma_1) F_1(w) + \lambda F_0(w) - jF_0'(w) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\mu_n F_n(w) + \alpha_n F_0(w) &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
-\gamma_2 F_{N+1}(w) + \gamma_0 F_0(w) + \gamma_1 F_1(w) &= 0, \\
jF_0'(w) + (\lambda + \gamma_1)F_1(w) + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} F_n(w) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Решение системы (3.95) будем искать в виде

$$F_k(w) = r_k \Phi(w), \quad k = \overline{0, N+1}.$$

где r_k имеет смысл стационарной вероятности того, что прибор находится в k -ом состоянии, получим

$$\begin{aligned}
-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right)r_0 + jr_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \sum_{k=1}^N \mu_k r_k + \gamma_2 r_{N+1} &= 0, \\
-(\mu_1 + \gamma_1)r_1 + \lambda r_0 - jr_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} &= 0, \\
-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
-\gamma_2 r_{N+1} + \gamma_0 r_0 + \gamma_1 r_1 &= 0, \\
jr_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + (\lambda + \gamma_1)r_1 + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} r_n &= 0.
\end{aligned}$$

Так как отношение $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w , то функцию $\Phi(w)$ можем записать в виде

$$\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\},$$

тогда $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_1$, имеем

$$\begin{aligned}
-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \kappa_1\right)r_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k r_k + \gamma_2 r_{N+1} &= 0, \\
-(\mu_1 + \gamma_1)r_1 + (\lambda + \kappa_1)r_0 &= 0, \\
-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
-\gamma_2 r_{N+1} + \gamma_0 r_0 + \gamma_1 r_1 &= 0,
\end{aligned}$$

$$-\kappa_1 r_0 + (\lambda + \gamma_1) r_1 + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} r_n = 0. \quad (3.96)$$

Из последнего уравнения (3.96) выразим r_0 , с учетом условия нормировки $\sum_{k=0}^{N+1} r_k = 1$, получим равенства, позволяющие найти стационарное распределение вероятностей состояний прибора

$$r_0 = \left[\frac{(\lambda + \kappa_1)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1},$$

$$r_1 = \frac{\lambda + \kappa_1}{\mu_1 + \gamma_1} \left[\frac{(\lambda + \kappa_1)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1},$$

$$r_n = \frac{\alpha_n}{\mu_n} \left[\frac{(\lambda + \kappa_1)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \quad n = \overline{2, N},$$

$$r_{N+1} = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_2} + \frac{\gamma_1(\lambda + \kappa_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} \right) \left[\frac{(\lambda + \kappa_1)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}.$$

Тогда из последнего уравнения системы (3.96) получим выражение для величины κ_1

$$\kappa_1 = \frac{\lambda \left(\gamma_2(\lambda + \gamma_1) + \lambda\gamma_1 + \gamma_0(\mu_1 + \gamma_1) + \gamma_2(\mu_1 + \gamma_1) \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right)}{\gamma_2\mu_1 - \lambda(\gamma_1 + \gamma_2)},$$

которое совпадает с (3.94). **Теорема доказана.**

Полученная величина κ_1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1/σ числа заявок на орбите в исследуемой системе с ненадежным прибором. Для построения распределения вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите рассмотрим асимптотику второго порядка.

Асимптотика второго порядка. В системе уравнений (2.23) сделаем замены

$$H_k(u) = \exp\left(ju \frac{\kappa_1}{\sigma}\right) H_k^{(2)}(u), \quad k = \overline{0, N+1},$$

получим систему

$$\begin{aligned}
& -\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0 + \kappa_1\right) H_0^{(2)}(u) + j\sigma H_0^{(2)'}(u) + \sum_{k=1}^N \mu_k H_k^{(2)}(u) + \gamma_2 H_{N+1}^{(2)}(u) = 0, \\
& (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) H_1^{(2)}(u) + \lambda H_0^{(2)}(u) + \kappa_1 e^{-ju} H_0^{(2)}(u) - j\sigma e^{-ju} H_0^{(2)'}(u) = 0, \\
& (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_n) H_n^{(2)}(u) + \alpha_n H_0^{(2)}(u) = 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
& (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2) H_{N+1}^{(2)}(u) + \gamma_0 H_0^{(2)}(u) + \gamma_1 e^{ju} H_1^{(2)}(u) = 0, \\
& -\kappa_1 e^{-ju} H_0^{(2)}(u) + j\sigma e^{-ju} H_0^{(2)'}(u) + (\lambda + \gamma_1) H_1^{(2)}(u) + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} H_n^{(2)}(u) = 0. \quad (3.97)
\end{aligned}$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и сделаем замены в полученной системе уравнений

$$u = \varepsilon w, \quad H_k^{(2)}(u) = F_k^{(2)}(w, \varepsilon), \quad k = \overline{0, N+1}$$

тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
& -\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0 + \kappa_1\right) F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} + \\
& + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \\
& (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \\
& + \kappa_1 e^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w, \varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\
& (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_n) F_n^{(2)}(w, \varepsilon) + \alpha_n F_0^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
& (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \gamma_2) F_{N+1}^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_0 F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_1 e^{j\varepsilon w} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \quad (3.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\kappa_1 e^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} + \\
& + (\lambda + \gamma_1) F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} F_n^{(2)}(w, \varepsilon) = 0. \quad (3.99)
\end{aligned}$$

Решение $F_k^{(2)}(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k^{(2)}(w, \varepsilon) = F_k^{(2)}(w), \quad k = \overline{0, N+1} \quad \text{и} \quad \text{предел} \quad \text{производной} \quad \text{по} \quad w$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{dF_0^{(2)}(w)}{dw}. \quad \text{Докажем следующую теорему.}$$

Теорема 3.7 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в RQ-системе $M|M|1$ с различными вызываемыми заявками и ненадежным прибором, то в контексте теоремы 3.6 выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sqrt{\sigma}\left(i(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma}\right)} = e^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2}, \quad (3.100)$$

где κ_1 определяется равенством (3.94), величина κ_2 определяется равенством

$$\begin{aligned} \kappa_2 = \kappa_1 + \frac{\lambda}{\gamma_2\mu_1 - \lambda(\gamma_1 + \gamma_2)} \times & \left[(\gamma_2(\lambda + \gamma_1) + \gamma_1(\lambda + \mu_1 + \gamma_1)) \frac{\lambda + \kappa_1}{\mu_1 + \gamma_1} + \right. \\ & \left. + \lambda\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1) \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n^2} + \frac{\lambda}{\gamma_2} (\gamma_0(\mu_1 + \gamma_1) + \gamma_1(\lambda + \kappa_1)) \right]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Доказательство. Решение системы уравнений (3.98) - (3.99) будем искать в виде

$$F_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi_2(w)(r_k + j\varepsilon wf_k) + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя данное разложение в систему (3.98) и уравнение (3.99) и раскладывая экспоненту в ряд Тейлора, запишем

$$\begin{aligned} - \left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0 + \kappa_1 \right) (r_0 + j\varepsilon wf_0) + j\varepsilon \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)} r_0 + \\ + \sum_{k=1}^N \mu_k (r_k + j\varepsilon wf_k) + \gamma_2 (r_{N+1} + j\varepsilon wf_{N+1}) = O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda j\varepsilon w - \mu_1 - \gamma_1)(r_1 + j\varepsilon wf_1) + \lambda(r_0 + j\varepsilon wf_0) + \\ + \kappa_1(1 - j\varepsilon w)\{r_0 + j\varepsilon wf_0\} - j\varepsilon(1 - j\varepsilon w) \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)} r_0 = O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$(\lambda j\varepsilon w - \mu_n)(r_n + j\varepsilon wf_n) + \alpha_n(r_0 + j\varepsilon wf_0) = O(\varepsilon^2), \quad n = \overline{2, N},$$

$$(\lambda j\varepsilon w - \gamma_2)(r_{N+1} + j\varepsilon wf_{N+1}) + \gamma_0(r_0 + j\varepsilon wf_0) + \gamma_1(1 + j\varepsilon w)(r_1 + j\varepsilon wf_1) = O(\varepsilon^2),$$

$$-\kappa_1(1 - j\varepsilon w)(r_0 + j\varepsilon wf_0) + j\varepsilon(1 - j\varepsilon w) \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)} r_0 +$$

$$+(\lambda + \gamma_1)(r_1 + j\varepsilon wf_1) + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} (r_n + j\varepsilon wf_n) = O(\varepsilon^2).$$

Разделим все уравнения на $jw\varepsilon\Phi_2(w)$ и, с учетом (3.96), перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} -f_0 \left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0 + \kappa_1 \right) + \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} r_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k f_k + \gamma_2 f_{N+1} &= 0, \\ -f_1(\mu_1 + \gamma_1) + \lambda f_0 + \kappa_1(f_0 - r_0) - \frac{\Phi_2'(w)}{\Phi_2(w)} r_0 + \lambda r_1 &= 0, \\ -\mu_n f_n + \lambda r_n + \alpha_n f_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\ -\gamma_2 f_{N+1} + \lambda r_{N+1} + \gamma_0 f_0 + \gamma_1(f_1 + r_1) &= 0, \\ -\kappa_1(f_0 - r_0) + \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} r_0 + (\lambda + \gamma_1)f_1 + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} f_n &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что скалярная функция $\Phi_2(w)$ определяется в виде

$$\Phi_2(w) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

так как отношение $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w . Тогда $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$, запишем систему

$$-\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0 + \kappa_1 \right) f_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k f_k + \gamma_2 f_{N+1} = \kappa_2 r_0,$$

$$(\lambda + \kappa_1) f_0 - (\mu_1 + \gamma_1) f_1 = \kappa_1 r_0 - \lambda r_1 - \kappa_2 r_0,$$

$$\alpha_n f_0 - \mu_n f_n = -\lambda r_n, \quad n = \overline{2, N},$$

$$\gamma_0 f_0 + \gamma_1 f_1 - \gamma_2 f_{N+1} = -\lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1, \quad (3.101)$$

$$-\kappa_1 f_0 + (\lambda + \gamma_1) f_1 + \lambda \sum_{n=2}^{N+1} f_n = \kappa_2 r_0 - \kappa_1 r_0. \quad (3.102)$$

Из уравнений системы (3.101) запишем

$$f_1 = \frac{\lambda + \kappa_1}{\mu_1 + \gamma_1} f_0 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\mu_1 + \gamma_1} r_0 + \frac{\lambda}{\mu_1 + \gamma_1} r_1,$$

$$f_n = \frac{\alpha_n}{\mu_n} f_0 + \frac{\lambda}{\mu_n} r_n, \quad n = \overline{2, N},$$

$$f_{N+1} = \frac{\gamma_0(\mu_1 + \gamma_1) + \gamma_1(\lambda + \kappa_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} f_0 + \frac{\gamma_1(\kappa_2 - \kappa_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} r_0 + \frac{\gamma_1(\lambda + \mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} r_1 + \frac{\lambda}{\gamma_2} r_{N+1}.$$

Подставляя эти равенства в уравнение (3.102), получим

$$\begin{aligned} & \left[-\kappa_1 + \frac{(\lambda + \gamma_1)(\lambda + \kappa_1)}{\mu_1 + \gamma_1} + \lambda \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} + \lambda \frac{\gamma_0(\mu_1 + \gamma_1) + \gamma_1(\kappa_1 + \lambda)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} \right] f_0 + \\ & + \left[\frac{(\lambda + \gamma_1)(\kappa_2 - \kappa_1)}{\mu_1 + \gamma_1} + \frac{\lambda \gamma_1(\kappa_2 - \kappa_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} - \kappa_2 + \kappa_1 \right] r_0 + \\ & + \left[\frac{\lambda(\lambda + \gamma_1)}{\mu_1 + \gamma_1} + \frac{\lambda \gamma_1(\lambda + \mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} \right] r_1 + \sum_{n=2}^N \frac{\lambda^2}{\mu_n} r_n + \frac{\lambda^2}{\gamma_2} r_{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку коэффициент при f_0 равен 0, получим из этого уравнения коэффициент κ_2 .

$$\begin{aligned} \kappa_2 = \kappa_1 + \frac{\lambda}{\gamma_2 \mu_1 - \lambda(\gamma_1 + \gamma_2)} \times & \left[(\gamma_2(\lambda + \gamma_1) + \gamma_1(\lambda + \mu_1 + \gamma_1)) \frac{\lambda + \kappa_1}{\mu_1 + \gamma_1} + \right. \\ & \left. + \lambda \gamma_2(\mu_1 + \gamma_1) \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n^2} + \frac{\lambda}{\gamma_2} (\gamma_0(\mu_1 + \gamma_1) + \gamma_1(\lambda + \kappa_1)) \right]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таким образом, найденная асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите в рассматриваемой системе с ненадежным прибором является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ . Задав гауссовскую плотность распределения вероятностей с полученными параметрами мы имеем распределение вероятностей числа заявок на орбите в системе с повторными вызовами и ненадежным прибором в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите.

3.2.2 Точность аппроксимаций распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором

Чтобы перейти от непрерывного распределения вероятностей к дискретному, воспользуемся формулой (3.89).

Зададим необходимые параметры $N = 3$, $\mu_1 = 4$, $\sigma = 1$, $\gamma_0 = 0.1$, $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 2$, $\alpha_n = n$, $\mu_n = n$, $n = 1, \dots, N$. Для различных параметров загрузки системы ρ

$$\rho = \frac{\lambda(\gamma_1 + \gamma_2)}{\mu_1 \gamma_2}$$

найдем точность гауссовской аппроксимации, используя расстояние Колмогорова (3.88). В таблицах 3.4 – 3.6 приведены значения этих расстояний для различных параметров σ и загрузке системы ρ .

Таблица 3.4 – Расстояние Колмогорова Δ при $\rho = 0.3$

Δ	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$
Δ	0.089	0.074	0.047	0.045

Таблица 3.5 – Расстояние Колмогорова Δ при $\rho = 0.6$

Δ	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$
Δ	0.089	0.072	0.045	0.032

Таблица 3.6 – Расстояние Колмогорова Δ при $\rho = 0.9$

Δ	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$
Δ	0.086	0.067	0.032	0.022

Из данных, представленных в таблицах 3.4 – 3.6, можем сделать вывод, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и ростом загрузки системы. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации приемлемой.

3.3 Тандемная RQ-система с общей орбитой M|M|1

В этом разделе приведем исследование тандемной RQ-системы M|M|1 с общей орбитой методом асимптотического анализа при условии неограниченного возрастания среднего значения времени задержки заявок на орбите.

Будем решать систему (2.63) методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$). Мы предполагаем наличие у исследуемой системы стационарного режима. Таким образом, система (2.63) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(u)\{\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}\} + j\sigma\mathbf{H}'(u)\{\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1\} &= 0, \\ \{\mathbf{H}(u)\mathbf{B} + j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'(u)\mathbf{I}_1\}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.102)$$

3.3.1 Асимптотический анализ RQ-системы с общей орбитой M|M|1 в предельном условии большой задержки заявок на орбите

Асимптотика первого порядка. Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и выполним в системе (3.102) замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}(w, \varepsilon). \quad (3.103)$$

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w, \varepsilon)\{\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B}\} + j\frac{\partial\mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w}\{\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1\} &= 0, \\ \left\{\mathbf{F}(w, \varepsilon)\mathbf{B} + je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial\mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Решение $\mathbf{F}(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}(w) \quad \text{и предел производной по } w \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial\mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{F}'(w).$$

Теорема 3.8 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в тандемной RQ-системе M|M|1 с общей орбитой, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jwi(t)\sigma} = e^{jw\kappa_1}, \quad (3.105)$$

где κ_1 является решением следующего уравнения

$$\mathbf{r}\{\mathbf{B} - \kappa_1\mathbf{I}_1\}\mathbf{e} = 0. \quad (3.106)$$

Здесь вектор стационарного распределения вероятностей состояний прибора \mathbf{r} является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} &= 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} &= 1 \end{aligned} \quad (3.107)$$

Доказательство. В системе (3.104) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим систему для $\mathbf{F}(w)$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w)\{\mathbf{A} + \mathbf{B}\} + j\mathbf{F}'(w)\{\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\} &= 0, \\ \{\mathbf{F}(w)\mathbf{B} + j\mathbf{F}'(w)\mathbf{I}_1\}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Решение системы (3.108) будем искать в виде:

$$\mathbf{F}(w) = \mathbf{r}\Phi(w), \quad (3.109)$$

где вектор-строка \mathbf{r} определяет стационарное распределение вероятностей состояний приборов, сумма элементов которых равна единице, согласно условию нормировки. Подставим выражение (3.109) в систему (3.108), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\{\mathbf{A} + \mathbf{B}\} + j\mathbf{r}\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}\{\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\} &= 0, \\ \mathbf{r}\left\{\mathbf{B} + j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}\mathbf{I}_1\right\}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Так как отношение $\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w , то скалярная функция $\Phi(w)$ имеет

вид

$$\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\},$$

Тогда $j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_1$. Подставим это значение в систему (3.110):

$$\mathbf{r}\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} = 0, \quad (3.111)$$

$$\mathbf{r}\{\mathbf{B} - \kappa_1\mathbf{I}_1\}\mathbf{e} = 0. \quad (3.112)$$

Решая систему (3.111) с учетом условия нормировки $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$, мы найдем стационарное распределение вероятностей состояний прибора \mathbf{r} , которое зависит от κ_1 , из уравнения (3.112) найдем величину κ_1 . **Теорема доказана.**

Асимптотика первого порядка определяет асимптотическое среднее значение κ_1/σ числа заявок на орбите в допредельной ситуации значений σ . Для более детального исследования числа $i(t)$ заявок на орбите рассмотрим асимптотику второго порядка.

Асимптотика второго порядка. В систему (3.102) подставим следующее выражение

$$\mathbf{H}(u) = \exp\left(j\frac{u}{\sigma}\kappa_1\right)\mathbf{H}^{(2)}(u), \quad (3.113)$$

получим систему:

$$\mathbf{H}^{(2)}(u) \left\{ \mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} - \kappa_1 (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1) \right\} + j\sigma \frac{d\mathbf{H}^{(2)}(u)}{du} \left\{ \mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1 \right\} = 0,$$

$$\mathbf{H}^{(2)}(u) (\mathbf{B} - e^{-ju} \kappa_1 \mathbf{I}_1) \mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{d\mathbf{H}^{(2)}(u)}{du} \mathbf{I}_1 \mathbf{e} = 0. \quad (3.114)$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и в системе (3.114) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}^{(2)}(u) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon). \quad (3.115)$$

Получим систему:

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon) \left\{ \mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B} - \kappa_1 (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1) \right\} + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \left\{ \mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1 \right\} = 0,$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon) (\mathbf{B} - e^{-j\varepsilon w} \kappa_1 \mathbf{I}_1) \mathbf{e} + j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_1 \mathbf{e} = 0. \quad (3.116)$$

Решение $\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w), \quad \text{и предел производной по } w \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{d\mathbf{F}^{(2)}(w)}{dw}. \quad \text{Дока-}$$

жем следующую теорему.

Теорема 3.9 Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в тандемной RQ-системе $M|M|1$ с общей орбитой, то в контексте теоремы 3.8 выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sqrt{\sigma} \left(i(t) - \frac{\kappa_1}{\sigma} \right)} = e^{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2}, \quad (3.117)$$

где κ_1 определяется уравнением (3.106), величина κ_2 определяется уравнением

$$\mathbf{g} (\mathbf{B} - \kappa_1 \mathbf{I}_1) \mathbf{e} = \mathbf{r} \mathbf{I}_1 (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{e}. \quad (3.118)$$

Вектор \mathbf{g} является решение системы уравнений

$$\mathbf{g} \left\{ \mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa_1 (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \right\} = \mathbf{r} (\kappa_2 \mathbf{I}_0 - \kappa_2 \mathbf{I}_1 - \mathbf{B} + \kappa_1 \mathbf{I}_1),$$

$$\mathbf{g} \mathbf{e} = 0 \quad (3.119)$$

Доказательство. В систему (3.116) подставим следующее разложение

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi_2(w) (\mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f}) + O(\varepsilon^2), \quad (3.120)$$

разложив экспоненту в ряд Тейлора, устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая (3.111), получим

$$\mathbf{r}\mathbf{B} - \mathbf{r}\kappa_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{f}\mathbf{A} + \mathbf{f}\mathbf{B} - \mathbf{f}\kappa_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}\mathbf{r}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0,$$

$$(\mathbf{r}\kappa_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{f}\mathbf{B} - \mathbf{f}\kappa_1\mathbf{I}_1)\mathbf{e} + \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}\mathbf{r}\mathbf{I}_1\mathbf{e} = 0. \quad (3.121)$$

Так как отношение $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w , то скалярная функция $\Phi_2(w)$ имеет вид

$$\Phi_2(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}, \quad (3.122)$$

Тогда $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$. Подставим это значение в систему (3.121):

$$\mathbf{f}\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} = \mathbf{r}(\kappa_2\mathbf{I}_0 - \kappa_2\mathbf{I}_1 - \mathbf{B} + \kappa_1\mathbf{I}_1), \quad (3.123)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{B} - \kappa_1\mathbf{I}_1)\mathbf{e} = \mathbf{r}\mathbf{I}_1(\kappa_2 - \kappa_1)\mathbf{e}. \quad (3.124)$$

Матричное уравнение (3.123) является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений для вектора \mathbf{f} . Поскольку определитель матрицы системы равен 0, а ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы, то система совместна и имеет множество решений.

Рассмотрим неоднородное матричное уравнение (3.123) и однородное уравнение (3.111). Учитывая, что система (3.111) является однородной системой для системы (3.123), запишем общее решение неоднородной системы (3.123) в виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{g}, \quad (3.125)$$

где \mathbf{C} – константа, \mathbf{r} – стационарное распределение вероятностей состояний приборов, а вектор-строка \mathbf{g} – частное решение неоднородной системы (3.123), которое удовлетворяет условию $\mathbf{g}\mathbf{e} = 0$.

Подставляя выражение (3.124) в систему (3.123) получим систему:

$$\mathbf{g}\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} = \mathbf{r}(\kappa_2\mathbf{I}_0 - \kappa_2\mathbf{I}_1 - \mathbf{B} + \kappa_1\mathbf{I}_1),$$

$$\mathbf{g}\mathbf{e} = 0, \quad (3.126)$$

которая определит вектор \mathbf{g} . Далее подставив решение (3.125) в уравнение (3.124), получим уравнение, которое определит величину κ_2

$$\mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa_1 \mathbf{I}_1) \mathbf{e} = \mathbf{r} \mathbf{I}_1 (\kappa_2 - \kappa_1) \mathbf{e}, \quad (3.127)$$

которая определяет дисперсию числа заявок κ_2/σ на орбите. **Теорема доказана.**

Асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ , что позволяет для допредельного распределения построить аппроксимацию.

3.3.2 Точность аппроксимаций распределения вероятностей числа заявок на орбите в тандемной RQ-системе M|M|1 с общей орбитой

Перейдем от непрерывного распределения вероятностей к дискретному, используя формулу (3.89).

Зададим необходимые параметры $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$. Для различных параметров загрузки системы ρ

$$\rho = \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2}$$

найдем точность гауссовской аппроксимации, используя расстояние Колмогорова (3.88). В таблице 3.7 приведены значения этих расстояний для различных параметров σ и загрузке системы ρ .

Таблица 3.7 – Расстояние Колмогорова Δ при различных загрузках системы

	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.02$
$\rho = 0.5$	0.142	0.071	0.034	0.022
$\rho = 0.6$	0.125	0.050	0.039	0.024
$\rho = 0.7$	0.112	0.055	0.040	0.026
$\rho = 0.8$	0.146	0.071	0.036	0.031

Из данных, представленных в таблице 3.7, можно сделать вывод, что точность аппроксимации растет с уменьшением параметра σ . Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации приемлемой и точной.

3.4 Резюме

В данной главе проведено исследование математических моделей RQ-систем различной конфигурации методами асимптотического анализа. RQ-система с ММРР входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками исследована в трех предельных условиях: большой задержки заявок на орбите, и, предложенных в диссертации, согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок, для которого предельное распределение вероятностей негауссовское и определяется равенством (3.77). RQ-система с ненадежным прибором и тандемная RQ-система с общей орбитой были исследованы в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите. Для представленных моделей на основе полученных асимптотических характеристик системы построены аппроксимации допредельного распределения вероятностей числа заявок на орбите. Анализ точности аппроксимации проведен по результатам сравнения аппроксимаций с распределениями вероятностей, полученными с помощью имитационного моделирования. Приведены численные примеры при различных значениях параметров системы.

Результаты, описанные в данной главе, были опубликованы в работах автора [42, 59, 44, 45, 50, 48, 92, 199, 198, 200, 201, 204, 208, 209, 214, 195, 217, 221, 218, 228].

Глава 4 Метод асимптотически диффузионного анализа

Данная глава посвящена разработке метода асимптотически-диффузионного анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите для исследования RQ-систем различной конфигурации. При таком предельном условии для распределения вероятностей числа заявок на орбите в исследуемых системах можно построить аппроксимацию данного распределения. Метод асимптотически-диффузионного анализа проводится в три этапа. На первом этапе находится асимптотическое стационарное распределение вероятностей состояний прибора системы и функция $a(x)$, которая имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите. При реализации второго этапа асимптотического анализа находится функция $b(x)$ – коэффициент диффузии процесса, определяющий асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите. Применяя полученные функции $a(x)$ и $b(x)$ на третьем этапе реализуется метод асимптотически диффузионного анализа и находится непрерывное предельное распределение, на основе которого строится достаточно точная аппроксимация для допредельного дискретного распределения вероятностей состояний рассматриваемой RQ-системы. Приводятся численные результаты сравнения предлагаемых аппроксимаций и имитационного моделирования рассматриваемых RQ-систем и устанавливается точность предлагаемых аппроксимаций, которая на порядок выше точности аппроксимаций, полученных методом асимптотического анализа предыдущей главы.

4.1 Исследование RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок

4.1.1 Метод асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками

Проведем построение диффузионной аппроксимации в несколько этапов. **Первый этап асимптотического анализа.** На первом этапе получим коэффициент переноса предельного диффузионного процесса. Для наглядности изложения начинаем исследование для нестационарных систем дифференциальных по t уравнений Колмогорова.

В системе уравнений (2.5) – (2.6) сделаем обозначение $\sigma = \varepsilon$ и введем следующие замены

$$\tau = \varepsilon t, u = \varepsilon w, \mathbf{H}_k(u, t) = \mathbf{F}_k(w, \tau, \varepsilon), k = \overline{0, N},$$

получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k(w, \tau, \varepsilon) + j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}, \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{F}_1(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon) \Lambda - j e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}, \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_n(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{F}_n(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \alpha_n \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon), n = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_n(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} = (e^{jw\varepsilon} - 1) \left(j e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w, \tau, \varepsilon) \Lambda \mathbf{e} \right). \quad (4.2)$$

Решение $\mathbf{F}_k(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}_k(w, \tau), k = \overline{0, N} \quad \text{и} \quad \text{предел} \quad \text{производных} \quad \text{по} \quad w$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau)}{\partial w} \quad \text{и} \quad \text{по} \quad \tau \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}_k(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}_k(w, \tau)}{\partial \tau}, k = \overline{0, N}.$$

Теорема 4.1 В рассматриваемой RQ-системе компоненты предельного при $\varepsilon \rightarrow 0$ вектора $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x)$ вероятностей состояний прибора и состояний цепи Маркова, управляющей входящим MMPP-потокм определяется системой

$$\mathbf{r}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - x \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) + \mathbf{r}_0(\Lambda + x(\tau)\mathbf{I}) &= 0, \\ \mathbf{r}_n(\mathbf{Q} - \mu_n\mathbf{I}) + \alpha_n\mathbf{r}_0 &= 0, n = \overline{2, N}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Здесь $x = x(\tau)$ является решением уравнения

$$x'(\tau) = -x(\tau)\mathbf{r}_0\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k\Lambda\mathbf{e}.\quad (4.4)$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (4.1) и уравнение (4.2) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0(w, \tau) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k(w, \tau) + j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_1(w, \tau) (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{F}_0(w, \tau) \Lambda - j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \tau)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_n(w, \tau) (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{F}_0(w, \tau) &= 0, n = \overline{2, N},\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_n(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} = jw \left(j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) \Lambda \mathbf{e} \right).\quad (4.6)$$

Будем искать решение системы уравнений (4.5) в виде

$$\mathbf{F}_k(w, \tau) = e^{jwx(\tau)} \mathbf{r}_k, \quad k = \overline{0, N}\quad (4.7)$$

где \mathbf{r}_k – двумерное стационарное распределение вероятностей состояний прибора и состояний цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток, $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ , которая определяет при $\varepsilon \rightarrow 0$ нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$ среднее значение $\varepsilon i(\tau)$ – числа заявок на орбите. Подставляя (4.7) в (4.5) и (4.6), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \sum_{n=2}^N \alpha_n \mathbf{I} - x \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{r}_k &= 0, \\ \mathbf{r}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_0 (\Lambda + x(\tau) \mathbf{I}) &= 0, \\ \mathbf{r}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{r}_0 &= 0, n = \overline{2, N},\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$x'(\tau) = -x(\tau)\mathbf{r}_0\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k\Lambda\mathbf{e}.\quad (4.9)$$

Система (4.8) для компонент векторов $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x)$ является однородной системой линейных алгебраических уравнений, решение которой зависит от значений x функции $x(\tau)$. **Теорема доказана.**

Равенство (4.9), совпадающее с (4.4), является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $x(\tau)$. Найдя решение $\mathbf{r}(x)$ системы (4.8), зависящее от x , подставив его в скалярное уравнение (4.9), обозначим

$$a(x) = -x(\tau)\mathbf{r}_0\mathbf{e} + \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \Lambda \mathbf{e}. \quad (4.10)$$

Ниже будет показано, что эта функция имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите.

Второй этап асимптотического анализа. Учитывая вид предельной характеристической функции $e^{j\omega x(\tau)}$ нормированного числа $\frac{1}{\sigma}i(\sigma t)$ из (4.7) Сделаем следующие замены в исходной системе уравнений (2.5) – (2.6)

$$\mathbf{H}_k(u, t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)} \mathbf{H}_k^{(2)}(u, t), \quad k = \overline{0, N}.$$

Для матричных функций $\mathbf{H}_k^{(2)}(u, t)$, учитывая обозначение (4.10), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)\mathbf{H}_0^{(2)}(u, t) &= \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \left(x + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) \mathbf{I} \right) + \\ &+ j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t)}{\partial u} + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{H}_k^{(2)}(u, t), \\ \frac{\partial \mathbf{H}_1^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)\mathbf{H}_1^{(2)}(u, t) &= \mathbf{H}_1^{(2)}(u, t) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \\ &+ \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t) \left(\Lambda + e^{-ju} x \mathbf{I} \right) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t)}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}_n^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)\mathbf{H}_n^{(2)}(u, t) &= \mathbf{H}_n^{(2)}(u, t) \left(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \\ &+ \alpha_n \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t), \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} + jua(x) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \mathbf{e} = (e^{ju} - 1) \times \\ & \times \left\{ -e^{-ju} x \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t) + e^{-ju} j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t)}{\partial u} + (\mathbf{H}^{(2)}(u, t) - \mathbf{H}_0^{(2)}(u, t)) \Lambda \right\} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь $\mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{H}_k^{(2)}(u, t)$.

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ и выполнив замены в системе (4.11)

$$\tau = t\varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}_k^{(2)}(u, t) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), k = \overline{0, N}, \mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \quad (4.12)$$

систему (4.11) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x) \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \left(x + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) \mathbf{I} \right) + \\ & + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \\ & \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x) \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{j\varepsilon w} - 1) \Lambda - \mu_1 \mathbf{I} \right) + \\ & + \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\Lambda + e^{-j\varepsilon w} x \mathbf{I} \right) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}, \\ & \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x) \mathbf{F}_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} + (e^{j\varepsilon w} - 1) \Lambda - \mu_n \mathbf{I} \right) + \\ & + \alpha_n \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), n = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (4.13),$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} + j\varepsilon wa(x) \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{e} = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ -e^{-j\varepsilon w} x \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + e^{-j\varepsilon w} j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + (\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) - \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)) \Lambda \right\} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Решение $\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует

предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau)$ и предел производных по w

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \tau)}{\partial w}$, и по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau)}{\partial \tau}$, $k = \overline{0, N}$. Докажем сле-

дующее утверждение.

Теорема 4.2 Векторные функции $\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau)$ имеют вид

$$\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \tau) = \Phi(w, \tau) \mathbf{r}_k(x), \quad k = \overline{0, N}, \quad (4.15)$$

где векторы $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x)$, зависящие от значений параметра x , определены системой (4.8) в Теореме 4.1, а скалярная функция $\Phi(w, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x)w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau). \quad (4.16)$$

Здесь функция $a(x)$ определяется равенством (4.10), а скалярная функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = a(x) + 2 \{ x \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + (\mathbf{g} - \mathbf{g}_0) \Lambda \mathbf{e} - x \mathbf{g}_0 \mathbf{e} \}, \quad (4.17)$$

где векторы $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k(x)$ определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0(x) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \left(x + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{g}_k(x) &= a(x) \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{g}_0(x) (\Lambda + x \mathbf{I}) + \mathbf{g}_1(x) (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) &= a(x) \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1 \Lambda + x \mathbf{r}_0 \\ \alpha_n \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) &= a(x) \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_n \Lambda, \quad n = \overline{2, N}. \\ \sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Доказательство. Разложив экспоненты в ряд Тейлора и сгруппировав слагаемые порядка не выше ε в системе (4.13), имеем

$$\begin{aligned} j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}_0^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}_0^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} - \Lambda - \left(x + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) \mathbf{I} \right) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{F}_k^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \\ j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}_1^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}_1^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{Q} + j\varepsilon w \Lambda - \mu_1 \mathbf{I}) + \\ + \mathbf{F}_0^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) (\Lambda + (1 - j\varepsilon w) x \mathbf{I}) - j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + O(\varepsilon^2), \\ j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}_n^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}_n^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{Q} + j\varepsilon w \Lambda - \mu_n \mathbf{I}) + \\ + \alpha_n \mathbf{F}_0^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned}$$

Решение этой системы запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_k^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{ \mathbf{r}_k(x) + j\varepsilon w \mathbf{f}_k(x) \} + O(\varepsilon^2), \quad (4.19)$$

где $\Phi(w, \tau)$ – некоторая скалярная функция, вид которой определим ниже. С учетом (4.8), разделим уравнения системы на $jw\varepsilon\Phi(w, \tau)$ и запишем систему в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(x) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \left(x + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{f}_k(x) &= a(x) \mathbf{r}_0 - \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{f}_0(x) (\mathbf{\Lambda} + x \mathbf{I}) + \mathbf{f}_1(x) (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) &= \\ = a(x) \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} + x \mathbf{r}_0 + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} \mathbf{r}_0, \\ \alpha_n \mathbf{f}_0(x) + \mathbf{f}_n(x) (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) &= a(x) \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_n \mathbf{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Применяя принцип суперпозиции для неоднородных систем, решение $\mathbf{f}(x)$ этого уравнения запишем в виде

$$\mathbf{f}_k(x) = C \mathbf{r}_k(x) + \mathbf{g}_k(x) - \boldsymbol{\varphi}_k(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)}, \quad (4.21)$$

которое подставим в (4.21), обозначив $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k(x)$ и $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k(x)$, получим две системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0(x) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \left(x + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{g}_k(x) &= a(x) \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{g}_0(x) (\mathbf{\Lambda} + x \mathbf{I}) + \mathbf{g}_1(x) (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) &= a(x) \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} + x \mathbf{r}_0 \\ \alpha_n \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) &= a(x) \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_n \mathbf{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0(x) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \left(x + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) \mathbf{I} \right) + \sum_{k=1}^N \mu_k \boldsymbol{\varphi}_k(x) &= \mathbf{r}_0, \\ \boldsymbol{\varphi}_0(x) (\mathbf{\Lambda} + x \mathbf{I}) + \boldsymbol{\varphi}_1(x) (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) &= -\mathbf{r}_0, \\ \alpha_n \boldsymbol{\varphi}_0(x) + \boldsymbol{\varphi}_n(x) (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) &= 0, \quad n = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Отметим, что система (4.22), определяющая вектор $\mathbf{g}(x)$, совпадает системой (4.18), следовательно, утверждение (4.18) формулировки теоремы верно.

Теперь рассмотрим систему (4.8). Если мы продифференцируем систему уравнений (4.8) по x , то полученная система идентична системе уравнений (4.23), из чего можем сделать вывод

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \boldsymbol{\varphi}_k(x) = \frac{\partial \mathbf{r}_k(x)}{\partial x}, \quad \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} = 0, \quad (4.24)$$

последнее соотношение получено путем дифференцирования условия нормировки для распределения \mathbf{r}_k по x .

В силу (4.21) векторы $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k(x)$ являются частными решениями неоднородной системы, поэтому она удовлетворяет некоторому дополнительному условию,

которое будем выбирать в виде $\sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0$, тогда решения $\mathbf{g}_k(x)$ системы (4.22), удо-

влетворяющие условию $\sum_{k=0}^N \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0$, определяются однозначно в виде (4.18).

Теперь рассмотрим скалярное уравнение (4.14), в которое подставим разложение (4.19) и, учитывая (4.10) перепишем его с точностью до $O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (j\varepsilon w)^2 a(x) \Phi(w, \tau) \mathbf{f} \mathbf{e} &= (j\varepsilon w)^2 \Phi(w, \tau) \{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} - x \mathbf{f}_0 \mathbf{e}\} + \\ &+ \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left(2 \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + 2x \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{f} = \sum_{k=0}^N \mathbf{f}_k$, $\mathbf{r} = \sum_{k=0}^N \mathbf{r}_k$. Разделим уравнение на ε^2 и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (jw)^2 a(x) \Phi(w, \tau) \mathbf{f} \mathbf{e} &= (jw)^2 \Phi(w, \tau) \{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} - x \mathbf{f}_0 \mathbf{e}\} + \\ &+ \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left(2 \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + 2x \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} \right), \end{aligned}$$

в которое подставим решение (4.21):

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \{a(x) + 2x \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + 2(\mathbf{g} - \mathbf{g}_0) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} - 2x \mathbf{g}_0 \mathbf{e} -$$

$$-2 \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} \left(-x \varphi_0 \mathbf{e} + (\varphi - \varphi_0) \Lambda \mathbf{e} - \mathbf{r}_0 \mathbf{e} \right) \}. \quad (4.25)$$

Обратим внимание на последний множитель, принимая во внимание (4.24) можно записать

$$-x \varphi_0 \mathbf{e} + (\varphi - \varphi_0) \Lambda \mathbf{e} - \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = a'(x).$$

Обозначив

$$b(x) = a(x) + 2 \left\{ x \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + (\mathbf{g} - \mathbf{g}_0) \Lambda \mathbf{e} - x \mathbf{g}_0 \mathbf{e} \right\}, \quad (4.26)$$

уравнение (4.26) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} a'(x) + \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) b(x). \quad (4.27)$$

которое совпадает с (4.16). Теорема доказана.

Метод асимптотически диффузионного анализа. В результате обозначения $\sigma = \varepsilon^2$ и замен

$$\tau = t \varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}_k^{(1)}(u, t) = \mathbf{F}_k^{(1)}(w, \tau, \varepsilon), k = \overline{0, N},$$

в системе уравнений для векторных функций $\mathbf{H}_k^{(1)}(u, t)$, в работе рассматривается предельный при $\sigma \rightarrow 0$ случайный процесс

$$\sqrt{\sigma} \left\{ i(\sigma t) - \frac{1}{\sigma} x(\sigma t) \right\} = \sqrt{\sigma} \left\{ i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right\},$$

где $i(\tau)$ – число заявок на орбите, а функция $x(\tau)$ определена выше как решение дифференциального уравнения $x'(\tau) = a(x)$. Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Предельный при $\sigma \rightarrow 0$ случайный процесс*

$$y(\tau) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sqrt{\sigma} \left\{ i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right\}$$

является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = a'(x) y d\tau + \sqrt{b(x)} dw(\tau), \quad (4.28)$$

зависящего от значений непрерывного параметра x .

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4.27) из Теоремы 4.2

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x)w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau),$$

для которого равенствами (4.10) и (4.17) найдены функции $a(x)$ и $b(x)$.

Решение $\Phi(w, \tau)$ этого уравнения определяет предельную при $\sigma \rightarrow 0$ характеристическую функцию централизованного и нормированного процесса $\sqrt{\sigma} \left\{ i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right\}$ предельного числа $i(t)$ заявок на орбите.

Выполнив в этом уравнении обратное преобразование Фурье по переменной w , для плотности распределения вероятностей

$$P(y, \tau) = \frac{\partial P\{y(\tau) < y\}}{\partial y}$$

предельного процесса $y(\tau)$ получим уравнение

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} \{a'(x)yP(y, \tau)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(x)P(y, \tau)\},$$

которое является уравнением Фоккера-Планка для плотности распределения вероятностей $P(y, \tau)$ значений централизованного и нормированного предельного числа заявок на орбите, а предельный случайный процесс $y(\tau)$ является диффузионным с коэффициентом переноса $a'(x)y$ и коэффициентом диффузии $b(x)$. Следовательно, диффузионный процесс $y(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения, совпадающего с (4.28). **Лемма доказана.**

Как указано выше, $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$. Рассмотрим случайный процесс

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \quad (4.29)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 4.2 *Случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения*

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau) \quad (4.30)$$

с точностью до бесконечно малых $O(\varepsilon^2)$.

Доказательство. Так как $x(\tau)$ является решением дифференциального уравнения $dx(\tau) = a(x)d\tau$, процесс $y(\tau)$ удовлетворяет уравнению (4.28), то выполняется равенство

$$dz(\tau) = d(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = (a(x) + \varepsilon y a'(x))d\tau + \varepsilon \sqrt{b(x)}dw(\tau), \quad (4.31)$$

коэффициенты которого запишем в виде

$$a(x) + \varepsilon y a'(x) = a(x + \varepsilon y) + O(\varepsilon^2) = a(z) + O(\varepsilon^2),$$

$$\varepsilon \sqrt{b(x)} = \varepsilon \sqrt{b(x + \varepsilon y) + O(\varepsilon)} = \varepsilon \sqrt{b(z)} + O(\varepsilon^2) = \sqrt{\sigma b(z)} + O(\varepsilon^2),$$

а равенство (4.31) перепишем в виде:

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau) + O(\varepsilon^2)$$

с точностью до бесконечно малых порядка $O(\varepsilon^2)$, которое совпадает с (42). **Лемма доказана.**

Рассмотрим стационарную плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$, т.е. будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, тогда

$$s(z, \tau) = s(z) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4.3 *Стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$ имеет вид:*

$$s(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \quad (4.32)$$

где C – нормирующая константа.

Доказательство. Так как $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения (4.30), следовательно, процесс является диффузионным с коэффициентом переноса $a(z)$ и коэффициентом диффузии $b(z)$, поэтому его стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ является решением уравнения Фоккера-Планка

$$-\frac{\partial}{\partial z} \{a(z)s(z)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{\sigma b(z)s(z)\} = 0,$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$(-a(z)s(z))' + \frac{\sigma}{2} (b(z)s(z))'' = 0,$$

которое перепишем в виде:

$$-a(z)s(z) + \frac{\sigma}{2} (b(z)s(z))' = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, учитывая краевое условие $s(\infty) = 0$, получим плотность распределения вероятностей $s(z)$ нормированного числа заявок на орбите в виде (4.32). **Теорема доказана.**

4.1.2 Точность диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками

Ставится задача нахождения аппроксимации дискретного распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы. Для построения аппроксимации дискретного распределения $P(i)$ вернемся к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$. Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P(i)$ дискретного случайного процесса $i(\tau)$ можно осуществить разными способами. Укажем один из них. В силу равенства (4.32), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}.$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей

$$P_{dif}(i) = G(i) / \sum_{i=0}^{\infty} G(i), \quad (4.33)$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $P_{dif}(i)$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для RQ-систем с использованием метода асимптотически-диффузионного анализа.

Точность аппроксимации $P_{dif}(i)$ определяется с помощью расстояния Колмогорова Δ_1

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P_{im}(i) - P_{dif}(i)) \right|, \quad (4.34)$$

которое показывает разницу между распределениями вероятностей $P(i)$ и $P_{dif}(i)$, где $P_{im}(i)$ получено с помощью имитационного моделирования, $P_{dif}(i)$ получено в виде (4.33), в котором коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются формулами (4.10) и (4.17) соответственно. Для сравнения с точностью аппроксимации (3.89), полученной с помощью метода асимптотического анализа зададим расстояние Колмогорова Δ_2 в виде

$$\Delta_2 = \max_{0 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P_{im}(i) - P_{app}(i)) \right|. \quad (4.35)$$

Зададим $N = 4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & -1.5 & 1 \\ 0.8 & 1.2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Зададим матрицу Λ в виде (3.91)

$$\Lambda = \frac{\rho \mu_1 \Lambda_1}{\mathbf{r} \Lambda_1 \mathbf{e}}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

ρ – параметр загрузки системы, значение которого определяет значение интенсивности входящего потока. Таким образом, варьируя параметр ρ загрузки системы, мы можем задать такую матрицу Λ , элементы которой будут удовлетворять условию существования стационарного режима в системе. Вектор \mathbf{r} является решением системы уравнений $\mathbf{rQ} = 0$, $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.

Таблица 4.1 – Расстояние Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$
Δ_2					
$\rho = 0.5$	0.060	0.029	0.022	0.019	0.016
	0.189	0.135	0.116	0.075	0.049
$\rho = 0.7$	0.025	0.022	0.021	0.018	0.013
	0.259	0.201	0.167	0.099	0.079
$\rho = 0.9$	0.016	0.016	0.013	0.011	0.006
	0.344	0.256	0.222	0.163	0.101

Из данных, представленных в таблице 4.1, сравнивая точность диффузионной аппроксимации с точностью гауссовской аппроксимации в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$, можем сделать вывод, что точность диффузионной аппроксимации превышает точность гауссовской аппроксимации на порядок.

Полужирным в таблице 4.1 выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

Для сравнения с гауссовской аппроксимацией в предельном условии $\alpha \rightarrow \infty$ зададим матрицу Λ в виде (4.36), $N = 4$, $\rho = 0.5$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, матрицу \mathbf{Q} в виде (4.35). Параметры α_n , $n = \overline{2, N}$ представим в виде $\alpha\eta_n$, $n = \overline{2, N}$ для удобства сравнения. Положим $\eta_2 = 1$, $\eta_3 = 2$, $\eta_4 = 3$.

Таблица 4.2 – Расстояние Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$
Δ_2					
$\alpha = 3$	0.036	0.027	0.021	0.013	0.006
	0.145	0.118	0.105	0.091	0.106
$\alpha = 5$	0.035	0.025	0.018	0.011	0.003
	0.114	0.097	0.082	0.073	0.088
$\alpha = 10$	0.033	0.023	0.017	0.010	0.002
	0.095	0.070	0.065	0.059	0.066

Из данных представленных в таблице 4.2 можем заключить, что точность диффузионной аппроксимации превышает точность гауссовской аппроксимации на порядок. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации приемлемой, точной и сверхточной.

Для сравнения с аппроксимацией в предельном условии $\mu \rightarrow 0$ зададим матрицу Λ в виде (4.36), $N = 4$, $\rho = 0.5$, $\mu_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, матрицу \mathbf{Q} в виде (4.35). Параметры μ_n , $n = \overline{2, N}$ представим в виде $\mu\eta_n$, $n = \overline{2, N}$ для удобства сравнения. Положим $\eta_2 = 2$, $\eta_3 = 3$, $\eta_4 = 4$.

Таблица 4.3 – Расстояние Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$
Δ_2					
$\mu = 0.5$	0.061	0.016	0.016	0.012	0.010
	0.361	0.252	0.251	0.262	0.296
$\mu = 0.1$	0.096	0.067	0.049	0.035	0.009
	0.100	0.090	0.101	0.095	0.105
$\mu = 0.05$	0.125	0.087	0.073	0.044	0.013
	0.053	0.048	0.046	0.051	0.067
$\mu = 0.03$	0.142	0.104	0.077	0.052	0.034
	0.031	0.030	0.030	0.038	0.040

Из данных представленных в таблице 4.3 можем сделать вывод, что точность диффузионной аппроксимации диффузионной аппроксимации падает с уменьшением параметра μ . Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации приемлемой, точной и сверхточной.

4.2 Исследование RQ-системы $M|M|1$ с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором

В данном разделе решается задача построения аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе $M|M|1$ с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором с использованием метода асимптотически-диффузионного анализа. Систему (10) будем решать методом асимптотически диффузионного анализа в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$.

4.2.1 Метод асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы $M|M|1$ с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором

Данный раздел посвящен разработке метода асимптотически-диффузионного анализа для RQ-системы $M|M|1$ с N типами вызываемых заявок и ненадежным прибором, который позволяет найти аппроксимацию распределения стационарного распределения числа заявок на орбите.

Первый этап асимптотически-диффузионного анализа. Обозначим $\sigma = \varepsilon$, сделаем замены в системе уравнений (2.21) – (2.22)

$$\tau = t\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H_k(u, t) = F_k(w, \tau, \varepsilon), \quad H(u, t) = F(w, \tau, \varepsilon).$$

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= - \left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) F_0(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ j \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial F_1(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) F_1(w, \tau, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \tau, \varepsilon) - j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial F_n(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_n) F_n(w, \tau, \varepsilon) + \alpha_n F_0(w, \tau, \varepsilon), \quad n = \overline{2, N}, \\ \varepsilon \frac{\partial F_{N+1}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \gamma_2) F_{N+1}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_0 F_0(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_1 e^{j\varepsilon w} F_1(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial F(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \gamma_1 F_1(w, \tau, \varepsilon) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n(w, \tau, \varepsilon) \right\}. \quad (4.37)\end{aligned}$$

Решение $F_k(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k(w, \tau, \varepsilon) = F_k(w, \tau)$, $k = \overline{0, N}$ и предел производных по w $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial F_0(w, \tau)}{\partial w}$ и по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F_k(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_k(w, \tau)}{\partial \tau}$.

Теорема 4.4 В рассматриваемой RQ -системе предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ $r_k = r_k(x)$ распределение вероятностей состояний прибора $k(t)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned}r_0(x) &= \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \\ r_1(x) &= \frac{\lambda + x}{\mu_1 + \gamma_1} \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \\ r_n(x) &= \frac{\alpha_n}{\mu_n} \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \quad n = \overline{2, N}, \\ r_{N+1}(x) &= \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_2} + \frac{\gamma_1(\lambda + x)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} \right) \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \\ \sum_{k=0}^{N+1} r_k(x) &= 1. \quad (4.38)\end{aligned}$$

Здесь $x = x(\tau)$ является решением уравнения

$$x'(\tau) = -x(\tau)r_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n. \quad (4.39)$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (4.37) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n \right) F_0(w, \tau) + j \frac{\partial F_0(w, \tau)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k(w, \tau) + \gamma_2 F_{N+1}(w, \tau) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -(\mu_1 + \gamma_1)F_1(w, \tau) + \lambda F_0(w, \tau) - j \frac{\partial F_0(w, \tau)}{\partial w} = 0, \\
& -\mu_n F_n(w, \tau) + \alpha_n F_0(w, \tau) = 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
& -\gamma_2 F_{N+1}(w, \tau) + \gamma_0 F_0(w, \tau) + \gamma_1 F_1(w, \tau) = 0, \\
& \frac{\partial F(w, \tau)}{\partial \tau} = jw \left\{ j \frac{\partial F_0(w, \tau)}{\partial w} + \gamma_1 F_1(w, \tau) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n(w, \tau) \right\}. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Решение системы (4.38) будем искать в виде

$$F_k(w, \tau) = r_k(x) e^{jwx(\tau)}, \quad k = \overline{0, N+1}. \quad (4.39)$$

Здесь $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ , которая определяет при $\varepsilon \rightarrow 0$, нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$, среднее значение $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите. $r_k(x)$ – распределение вероятностей состояний прибора $k(t)$. Подставим произведение (4.39) в систему (4.38), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
& -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) r_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k r_k + \gamma_2 r_{N+1} = 0, \\
& -(\mu_1 + \gamma_1) r_1 + (\lambda + x) r_0 = 0, \\
& -\mu_n r_n + \alpha_n r_0 = 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
& -\gamma_2 r_{N+1} + \gamma_0 r_0 + \gamma_1 r_1 = 0, \quad (4.40)
\end{aligned}$$

$$x'(\tau) = -x(\tau) r_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n. \quad (4.41)$$

Обозначив вероятности $r_k = r_k(x)$, найдем их из системы (4.40) с учетом условия нормировки $\sum_{k=0}^{N+1} r_k(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
r_0(x) &= \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \\
r_1(x) &= \frac{\lambda + x}{\mu_1 + \gamma_1} \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \\
r_n(x) &= \frac{\alpha_n}{\mu_n} \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}, \quad n = \overline{2, N},
\end{aligned}$$

$$r_{N+1}(x) = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_2} + \frac{\gamma_1(\lambda + x)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} \right) \left[\frac{(\lambda + x)(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_0 + \gamma_2)(\mu_1 + \gamma_1)}{\gamma_2(\mu_1 + \gamma_1)} + \sum_{n=2}^N \frac{\alpha_n}{\mu_n} \right]^{-1}.$$

Теорема доказана.

Обозначим функцию $a(x)$

$$a(x) = \lambda - \left(x - \frac{\gamma_1(\lambda + x)}{\mu_1 + \gamma_1} + \lambda \right) r_0(x). \quad (4.42)$$

Ниже покажем, что эта функция имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите.

Второй этап асимптотически-диффузионного анализа. В системе (2.21) и уравнении (2.22) введем замены

$$H_k(u, t) = H_k^{(2)}(u, t) e^{j \frac{u}{\sigma} x(\sigma)}, \quad k = \overline{0, N+1}.$$

Для функций $H_k^{(1)}(u, t)$, учитывая обозначение (4.42), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_0^{(2)}(u, t) &= - \left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0 + x \right) H_0^{(2)}(u, t) + \\ &+ j\sigma \frac{\partial H_0^{(2)}(u, t)}{\partial u} + \sum_{k=1}^N \mu_k H_k^{(2)}(u, t) + \gamma_2 H_{N+1}^{(2)}(u, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_1^{(2)}(u, t) &= \left(\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_1 \right) H_1^{(2)}(u, t) + \\ &+ \left(\lambda + xe^{-ju} \right) H_0^{(2)}(u, t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0^{(2)}(u, t)}{\partial u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_n^{(2)}(u, t) &= \left(\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_n \right) H_n^{(2)}(u, t) + \\ &+ \alpha_n H_0^{(2)}(u, t), \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{N+1}^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_{N+1}^{(2)}(u, t) &= \left(\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2 \right) H_{N+1}^{(2)}(u, t) + \\ &+ \gamma_0 H_0^{(2)}(u, t) + \gamma_1 e^{ju} H_1^{(2)}(u, t), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jua(x)H^{(2)}(u,t) = (e^{ju} - 1) \times \left\{ -xe^{-ju}H_0^{(2)}(u,t) + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} + \gamma_1 H_1^{(2)}(u,t) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} H_n^{(2)}(u,t) \right\}. \quad (4.43)$$

Здесь $H(u,t) = \sum_{n=0}^{N+1} H_n^{(2)}(u,t)$. Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ и выполнив замены

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad u = \varepsilon w, \quad H_k^{(2)}(u,t) = F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \quad k = \overline{0, N+1}. \quad (4.44)$$

систему (4.43) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= \left(\lambda (e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_1 - \gamma_1 \right) F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \left(\lambda + xe^{-j\varepsilon w} \right) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= \left(\lambda (e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_n \right) F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \alpha_n F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \quad n = \overline{2, N}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= \left(\lambda (e^{j\varepsilon w} - 1) - \gamma_2 \right) F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \gamma_0 F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_1 e^{j\varepsilon w} F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \times \\ &\times \left\{ -xe^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \right. \\ &\left. + \gamma_1 F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Решение $F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = F_k^{(2)}(w, \tau)$ и предел производных по w $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_0^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{F_0^{(1)}(w, \tau)}{\partial w}$ и по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{F_k^{(2)}(w, \tau)}{\partial \tau}$, $k = \overline{0, N}$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 4.5 *Функции $F_k^{(2)}(w, \tau)$ имеют вид*

$$F_k^{(2)}(w, \tau) = \Phi(w, \tau) r_k(x), \quad k = \overline{0, N}, \quad (4.46)$$

где вероятности $r_k = r_k(x)$, зависящие от значений параметра x , определены равенствами (4.38) в Теореме 4.4, а скалярная функция $\Phi(w, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x)w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau). \quad (4.47)$$

Здесь функция $a(x)$ определяется равенством (4.42), а скалярная функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = a(x) + 2 \left(-xg_0(x) + \gamma_1 g_1(x) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} g_n(x) + xr_0(x) \right), \quad (4.48)$$

где функции $g_k = g_k(x)$ определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} - \left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) g_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k g_k + \gamma_2 g_{N+1} &= a(x) r_0, \\ -(\mu_1 + \gamma_1) g_1 + (\lambda + x) g_0 &= a(x) r_1 - \lambda r_1 + x r_0, \\ -\mu_n g_n + \alpha_n g_0 &= a(x) r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N}, \\ -\gamma_2 g_{N+1} + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 &= a(x) r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1, \\ \sum_{k=0}^{N+1} g_k &= 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Доказательство. В первых четырёх уравнениях системы (4.45) разложим экспоненты в ряд Тейлора и сгруппируем слагаемые порядка малости не выше ε

$$j\varepsilon w a(x) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = - \left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) +$$

$$\begin{aligned}
& + j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \\
& j\varepsilon w a(x) F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = (j\varepsilon w \lambda - \mu_1 - \gamma_1) F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + (\lambda + x(1 - j\varepsilon w)) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + O(\varepsilon^2), \\
& j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = (j\varepsilon w \lambda - \mu_n) F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \alpha_n F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad n = \overline{2, N}, \\
& j\varepsilon w a(x) F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = (j\varepsilon w \lambda - \gamma_2) F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \gamma_0 F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_1 (1 + j\varepsilon w) F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Будем искать решение системы (4.50) в виде разложения

$$F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{r_k + j\varepsilon w f_k\} + O(\varepsilon^2), \quad k = \overline{0, N+1}. \tag{4.51}$$

Здесь $\Phi(w, \tau)$ – некоторая скалярная функция, вид которой определим ниже. Разделим уравнения системы на $j\varepsilon w \Phi(w, \tau)$ и запишем систему в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
& - \left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) f_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k f_k + \gamma_2 f_{N+1} = a(x) r_0 - \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} r_0, \\
& (\lambda + x) f_0 - (\mu_1 + \gamma_1) f_1 = a(x) r_1 - \lambda r_1 + x r_0 + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} r_0, \\
& \alpha_n f_0 - \mu_n f_n = a(x) r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N}, \\
& \gamma_0 f_0 + \gamma_1 f_1 - \gamma_2 f_{N+1} = a(x) r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Общее решение $f(x)$ этой системы уравнений запишем в виде суммы

$$f_k = C r_k + g_k - \varphi_k \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)}, \tag{4.53}$$

которое подставим в (4.52), получим две системы уравнений

$$\begin{aligned}
& - \left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) g_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k g_k + \gamma_2 g_{N+1} = a(x) r_0, \\
& - (\mu_1 + \gamma_1) g_1 + (\lambda + x) g_0 = a(x) r_1 - \lambda r_1 + x r_0, \\
& - \mu_n g_n + \alpha_n g_0 = a(x) r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N}, \\
& - \gamma_2 g_{N+1} + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 = a(x) r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right)\varphi_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \varphi_k + \gamma_2 \varphi_{N+1} = r_0, \\
& -(\mu_1 + \gamma_1)\varphi_1 + (\lambda + x)\varphi_0 = -r_0, \\
& -\mu_n \varphi_n + \alpha_n \varphi_0 = 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
& -\gamma_2 \varphi_{N+1} + \gamma_0 \varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Рассмотрим систему уравнений (4.40). Если мы продифференцируем по x систему уравнений (4.40), то полученная система идентична системе уравнений (22), из чего можем сделать вывод, что

$$\varphi_k = \varphi_k(x) = r_k'(x), \quad \sum_{k=0}^{N+1} \varphi_k = 0,$$

где последнее соотношение получено путем дифференцирования условия нормировки для распределения $r_k(x)$ по x .

Далее рассмотрим систему уравнений (4.54). Данная система имеет бесконечное число решений, так как определитель матрицы системы равен нулю и ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы. Наложим на неизвестные g_k дополнительное условие $\sum_{k=0}^{N+1} g_k = 0$ и получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
& -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right)g_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k g_k + \gamma_2 g_{N+1} = a(x)r_0, \\
& -(\mu_1 + \gamma_1)g_1 + (\lambda + x)g_0 = a(x)r_1 - \lambda r_1 + x r_0, \\
& -\mu_n g_n + \alpha_n g_0 = a(x)r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N}, \\
& -\gamma_2 g_{N+1} + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 = a(x)r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1, \\
& \sum_{k=0}^{N+1} g_k = 0.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

которая имеет единственное решение и совпадает с (4.49).

Обратимся к последнему уравнению системы (4.50). В этом уравнении сгруппируем слагаемые порядка малости не выше ε^2

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) \left\{ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - \right. \\ \left. -x(1 - jw\varepsilon) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_1 F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \right\} + O(\varepsilon^3).$$

Подставим разложение (4.51) в полученное уравнение, с учетом (4.40), разделим уравнение на ε^2 и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = (jw)^2 \left\{ -a(x) \sum_{k=0}^{N+1} f_k + xr_0 - xf_0 + \gamma_1 f_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} f_n \right\} \Phi(w, \tau) + \\ + j^2 w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} r_0 + \frac{(jw)^2}{2} \left\{ -xr_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n \right\} \Phi(w, \tau),$$

в которое подставим разложение (4.53)

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{(jw)^2}{2} \left\{ -xr_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n + 2 \left(xr_0 - xg_0 + \gamma_1 g_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} g_n \right) \right\} \Phi(w, \tau) - \\ - (jw)^2 \left\{ -x\varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} \varphi_n - r_0 \right\} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w}.$$

Обратим внимание на множитель в последнем слагаемом

$$-x\varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} \varphi_n - r_0 = \\ = -x \frac{\partial r_0(x)}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial r_1(x)}{\partial x} + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\partial r_n(x)}{\partial x} - r_0(x) = a'(x).$$

С учетом (4.41) и (4.42), обозначим

$$b(x) = a(x) + 2 \left(-xg_0(x) + \gamma_1 g_1(x) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} g_n(x) + xr_0(x) \right). \quad (4.57)$$

Тогда наше уравнение для $\Phi(w, \tau)$ перепишется в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau). \quad (4.58)$$

Функция $b(x)$ имеет смысл коэффициента диффузии того диффузионного процесса, для которого коэффициентом переноса является функция $a(x)$. **Теорема доказана.**

Построение диффузионной аппроксимации. Реализация метода асимптотически диффузионного анализа для нахождения распределения вероятностей значений предельного при $\sigma \rightarrow 0$ процесса числа $i(t)$ заявок на орбите рассматриваемой системы с повторными вызовами аналогична реализации этого метода для RQ-системы с ММРР входящим потоком, разнотипными вызываемыми заявками в леммах 4.1 – 4.2 и теореме 4.3.

4.2.2 Точность диффузионной аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей (4.33). Предложенное дискретное распределение вероятностей $P_{dif}(i)$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P(i(t) = i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы.

Точность аппроксимации $P_{dif}(i)$ определяется с помощью расстояния Колмогорова Δ_1 (4.34), которое показывает разницу между распределениями вероятностей $P_{im}(i)$ и $P_{dif}(i)$, где $P_{im}(i)$ получено с помощью имитационного моделирования, $P_{dif}(i)$ получено в виде (4.33), в котором коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются формулами (4.42) и (4.47) соответственно. Для сравнения с точностью аппроксимации в виде (3.89) для данной системы, полученной с помощью метода асимптотического анализа зададим расстояние Колмогорова Δ_2 в виде (4.35). Определим загрузку системы ρ по формуле

$$\rho = \frac{\lambda(\gamma_1 + \gamma_2)}{\mu_1 \gamma_2}.$$

Зададим необходимые параметры исследуемой системы $\lambda = 2$, $N = 3$, $\alpha_n = n$, $\mu_n = n$, $n = \overline{1, N}$, $\gamma_0 = 0.1$, $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 1$.

В таблице 4.4 приведены значения расстояний Колмогорова для различных параметров σ и загрузки системы ρ .

Таблица 4.4 – Расстояния Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$
Δ_2				
$\rho = 0.3$	0.023	0.022	0.013	0.011
	0.089	0.074	0.047	0.045
$\rho = 0.6$	0.016	0.012	0.008	0.003
	0.089	0.072	0.045	0.032
$\rho = 0.9$	0.009	0.007	0.006	0.005
	0.086	0.067	0.032	0.022

Анализируя данные таблицы 4.4, можно сказать, что точность диффузионной аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и увеличении загрузки системы ρ . Точность гауссовской аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и почти не изменяется при росте загрузки системы ρ . Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной. Из полученных значений можно сделать вывод, что аппроксимация асимптотического анализа дает хорошие результаты при низкой интенсивности повторного обслуживания ($\sigma = 0.1$ и $\sigma = 0.05$). Аппроксимация асимптотически-диффузионного анализа достаточно точна при любом параметре σ , которые представлены в таблице 4.4, что существенно увеличивает область применимости предлагаемой аппроксимации.

4.3 Исследование тандемной RQ-системы MMPP|M|1 с общей орбитой

Данный раздел посвящен разработке метода асимптотически-диффузионного анализа марковской тандемной RQ-системы с общей орбитой, который позволяет построить достаточно точную аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите.

4.3.1 Метод асимптотически-диффузионного анализа тандемной RQ-системы MMPP|M|1 с общей орбитой

Первый этап асимптотического анализа. Обозначив $\sigma = \varepsilon$ и выполнив в системе (2.62) замены

$$\tau = t\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon),$$

систему (2.62) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{B} + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Обозначим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}(w, \tau), \quad \mathbf{F}(0, \tau) = \mathbf{r}.$$

Вектор-строка \mathbf{r} определяет трехмерное распределение вероятностей состояний (n_1, n_2) приборов и состояний k входящего MMPP-потока. Ниже будет показано, что вектор \mathbf{r} , удовлетворяющий условию нормировки $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$, является решением матричного уравнения

$$\mathbf{r} \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \} = 0,$$

коэффициенты которого зависят от некоторой переменной x , поэтому решение \mathbf{r} будет зависеть от ее значений x , что обозначим как $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$.

Решение $\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}(w, \tau)$ и предел производных по w $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w}$ и

по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial \tau}$. Решая систему (4.59) в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$

($\sigma \rightarrow 0$) докажем следующее утверждение.

Теорема 4.6 В предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sigma i \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)} = e^{jwx(\tau)}, \quad (4.60)$$

где скалярная функция $x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau) = \mathbf{r}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}, \quad (4.62)$$

здесь вектор $\mathbf{r}(x)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\mathbf{r}(x)\mathbf{e} = 1, \quad (4.63)$$

и является решением матричного уравнения

$$\mathbf{r}(x)\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} = 0. \quad (4.64)$$

Доказательство. В системе (4.59) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w, \tau)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{e} &= jw \left\{ \mathbf{F}(w, \tau)\mathbf{B} + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Решение системы (4.65) будем искать в виде произведения

$$\mathbf{F}(w, \tau) = \mathbf{r}(x)e^{jwx(\tau)}. \quad (4.66)$$

Здесь $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ , которая определяет при $\varepsilon \rightarrow 0$, нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$, среднее значение $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите. Подставим произведение (4.66) в систему (4.65), получим

$$\mathbf{r}(x)\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} = 0, \quad (4.67)$$

$$x'(\tau) = \mathbf{r}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}. \quad (4.68)$$

В силу того, что скалярная функция $x(\tau)$ аргумента τ , является предельным при $\varepsilon \rightarrow 0$, нормированным величиной $\varepsilon = \sigma$, средним значением $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите, то выполняется равенство (4.60). **Теорема доказана.**

Найдя решение $\mathbf{r}(x)$ системы (4.67), подставив его в скалярное уравнение (4.68), обозначим

$$a(x) = \mathbf{r}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}. \quad (4.69)$$

В доказанной теореме 4.5 показано, что $a(x) = x'(\tau)$, поэтому функция $a(x)$ определяет динамику процесса $x(\tau)$, предельного при $\sigma \rightarrow 0$ для нормированного числа $\sigma i(\tau/\sigma)$ заявок на орбите.

Эта функция $a(x)$ имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите рассматриваемой RQ-системы. Применяя функцию $a(x)$, получим необходимое условие существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе.

Условие существования стационарного режима. Условием существования стационарного режима будем называть неравенство $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) < 0$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4.7 *Условием существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе является неравенство:*

$$\mathbf{r}_1 \Lambda \mathbf{e}_1 < \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (4.70)$$

Здесь вектор \mathbf{r}_1 – вектор стационарных вероятностей значений управляющего процесса $m(t)$, для которого $\mathbf{r}_1 \mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{r}_1 \mathbf{e}_1 = 1$, Λ – диагональная матрица с элементами λ_k , $k = \overline{1, K}$, единичный вектор-столбец \mathbf{e}_1 имеет размерность K .

Доказательство. Для выполнения условия существования стационарного режима необходимо найти предельное при $x \rightarrow \infty$ значение функции $a(x)$. В силу (4.69), функция $a(x)$ определяется равенством $a(x) = \mathbf{r}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}$, указанное равенство перепишем для компонент $r(n_1, n_2, x)$ в виде:

$$a(x) = -(\mathbf{r}_0(x) + \mathbf{r}_2(x))x\mathbf{e}_1 + (\mathbf{r}_1(x) + \mathbf{r}_3(x))\Lambda\mathbf{e}_1 + \mathbf{r}_3(x)\mu_1\mathbf{e}_1.$$

Для того, чтобы найти предельное значение $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)$, определим векторные компоненты вектора $\mathbf{r}(x) = \{\mathbf{r}_0(x), \mathbf{r}_1(x), \mathbf{r}_2(x), \mathbf{r}_3(x)\}$ определяемые равенствами (4.62) и (4.63).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(x)(\mathbf{Q} - \Lambda - x\mathbf{I}) + \mu_2\mathbf{r}_2(x)\mathbf{I} &= 0, \\ \mathbf{r}_0(x)(\Lambda + x\mathbf{I}) + \mathbf{r}_1(x)(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) + \mu_2\mathbf{r}_3(x)\mathbf{I} &= 0, \\ \mu_1\mathbf{r}_1(x) + \mathbf{r}_2(x)(\mathbf{Q} - (\Lambda + \mu_2\mathbf{I} + x\mathbf{I})) + \mu_1\mathbf{r}_3(x) &= 0, \\ \mathbf{r}_2(x)(\Lambda + x\mathbf{I}) + \mathbf{r}_3(x)(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I} - \mu_2\mathbf{I}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_0(x) + \mathbf{r}_1(x) + \mathbf{r}_2(x) + \mathbf{r}_3(x) = \mathbf{r}_1.$$

Здесь вектор \mathbf{r}_1 – вектор стационарных вероятностей значений управляющего процесса $k(t)$, $k = \overline{1, K}$. Решение этой системы имеет вид:

$$\mathbf{r}_2(x) = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{r}_0(x) (\mathbf{\Lambda} + x\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \frac{x}{\mu_2} \mathbf{r}_0(x) \left(\mathbf{I} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

$$\mathbf{r}_1(x) = \frac{x^2}{\mu_2} \mathbf{r}_0(x) \left(\frac{1}{\mu_1} \mathbf{I} - (\mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) \left(\mathbf{I} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

$$\mathbf{r}_3(x) = \frac{x^2}{\mu_2} \mathbf{r}_0(x) (\mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \left(\mathbf{I} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$\mathbf{r}_0(x) + \mathbf{r}_1(x) + \mathbf{r}_2(x) + \mathbf{r}_3(x) = \mathbf{r}_1 = \frac{x^2}{\mu_1 \mu_2} \mathbf{r}_0(x) \left(\mathbf{I} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Из последнего уравнения системы получим равенство

$$x^2 \mathbf{r}_0(x) = \mu_1 \mu_2 \mathbf{r}_1 \left(\mathbf{I} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right). \quad (4.71)$$

Вернемся к функции $a(x)$. Найдем предельное при $x \rightarrow \infty$ значение функции $a(x)$, определяемой равенством (4.69):

$$\begin{aligned} a(x) &= \left\{ (\mathbf{r}_1(x) + \mathbf{r}_3(x)) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{r}_3(x) \mu_1 - (\mathbf{r}_0(x) + \mathbf{r}_2(x)) x \right\} \mathbf{e}_1 = \\ &= \frac{x^2}{\mu_2} \mathbf{r}_0(x) \left\{ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{\Lambda} + \mu_1 (\mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \mathbf{I} \right\} \mathbf{e}_1 \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\mu_1 (\mu_1 \mathbf{I} + \mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{e}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right)^{-1} \mathbf{e}_1.$$

Обозначим $\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right)^{-1} \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$, и в последнем равенстве умножим левую

и правую часть на матрицу $\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right)$:

$$\mathbf{e}_1 = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} \right) \mathbf{v},$$

Очевидно, что $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$. Тогда выражение для $a(x)$ перепишем в виде:

$$a(x) = \frac{x^2}{\mu_2} \mathbf{r}_0(x) \left\{ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{\Lambda} - \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{I} \right\} \mathbf{e}_1 \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

в которое подставим выражение (4.71):

$$a(x) = \left\{ \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Неравенство $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) < 0$, определяющее условие существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе выполняется при выполнении равенства

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_1 < \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Теорема доказана.

На первом этапе асимптотического анализа, аналогично закону больших чисел, было получено равенство (4.60), определяющее сходимость при $\sigma \rightarrow 0$ характеристической функции нормированного случайного процесса $\sigma i(\tau/\sigma)$ к детерминированной функции $x(\tau)$. Для более детального исследования числа $i(t)$ заявок на орбите реализуем второй этап асимптотического анализа.

Второй этап асимптотического анализа. В исходной системе уравнений (2.62) сделаем следующие замены

$$\mathbf{H}(u, t) = e^{\frac{j}{\sigma} x(\sigma t)} \mathbf{H}^{(2)}(u, t), \quad (4.72)$$

для векторной функции $\mathbf{H}^{(2)}(u, t)$, учитывая обозначение (4.72), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} + j u a(x) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) &= \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \left(\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} - x \left(\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1 \right) \right) + \\ &+ j \sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} \left(\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1 \right), \\ \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} + j u a(x) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \mathbf{e} &= \left(e^{ju} - 1 \right) \times \\ \times \left\{ \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \left(\mathbf{B} - e^{-ju} x \mathbf{I}_0 \right) + j \sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Замена (4.72) выполняется с целью асимптотического центрирования случайного процесса $i(t)$, так как $\mathbf{H}^{(2)}(u, t)$ является векторной характеристической функцией центрированного случайного процесса $i(t) - \frac{1}{\sigma} x(\sigma t)$, в котором функция $x(\tau)$ получена на первом этапе асимптотического анализа.

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ в системе (4.73) и выполнив замены

$$\tau = t\varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \quad (4.74)$$

систему (4.73) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1) \right) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} + j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{e} &= \\ = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left(\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{B} - e^{-j\varepsilon w} x \mathbf{I}_0) + e^{-j\varepsilon w} j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \right) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Решение $\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)$ и предел производных по w $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)}{\partial w}$ и по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)}{\partial \tau}$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 4.8 Вектор-функция $\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)$ имеет вид

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau) = \Phi(w, \tau) \mathbf{r}(x), \quad (4.76)$$

где вектор-строка $\mathbf{r}(x)$, зависящий от значений параметра x , определен в Теореме 4.6, а скалярная функция $\Phi(w, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau). \quad (4.77)$$

Здесь функция $a(x)$ определяется равенством (4.69), а скалярная функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = a(x) + 2\mathbf{g}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e} + 2x\mathbf{r}(x)\mathbf{e}, \quad (4.78)$$

где вектор $\mathbf{g}(x)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) &= a(x)\mathbf{r}(x) + \mathbf{r}(x)(x\mathbf{I}_0 - \mathbf{B}), \\ \mathbf{g}(x)\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы (4.75) с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} j\varepsilon w a(x)\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w\mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w\mathbf{I}_1)) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Решение этого уравнения запишем в виде разложения:

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau)\{\mathbf{r}(x) + j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\} + O(\varepsilon^2), \quad (4.80)$$

где $\Phi(w, \tau)$ – некоторая скалярная функция, вид которой определим ниже. Получим

$$\begin{aligned} j\varepsilon w a(x)\Phi(w, \tau)\mathbf{r}(x) &= \Phi(w, \tau)\{\mathbf{r}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \\ &+ j\varepsilon w[\mathbf{f}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{r}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)]\} + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w}\mathbf{r}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство (4.67), разделим последнее уравнение на $j\varepsilon$ и устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} a(x)\mathbf{r}(x) &= \\ &= \mathbf{f}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{r}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0) + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}\mathbf{r}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1). \end{aligned}$$

Последнее равенство перепишем в виде неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) &= \\ &= a(x)\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0) + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}\mathbf{r}(x)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Применяя принцип суперпозиции для неоднородных систем, решение $\mathbf{f}(x)$ этого уравнения запишем в виде суммы

$$\mathbf{f}(x) = C\mathbf{r}(x) + \mathbf{g}(x) - \varphi(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \quad (4.82)$$

которое подставим в (4.81), получим уравнения

$$\varphi(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = \mathbf{r}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1), \quad (4.83)$$

$$\mathbf{g}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = a(x)\mathbf{r}(x) + \mathbf{r}(x)(x\mathbf{I}_0 - \mathbf{B}). \quad (4.84)$$

Отметим, что уравнение (4.84), определяющее вектор $\mathbf{g}(x)$, совпадает с первым уравнением (4.79), следовательно, утверждение (4.79) формулировки теоремы верно. Теперь рассмотрим уравнение (4.67). Продифференцируем его по x , получим равенство:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x} \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \} + \mathbf{r}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0.$$

Учитывая последнее уравнение и уравнение (4.83) для $\varphi(x)$, запишем важное равенство:

$$\varphi(x) = \frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x}, \quad (4.85)$$

В силу условия нормировки (4.63), для вектора $\varphi(x)$ выполняется дополнительное условие $\varphi(x)\mathbf{e} = 0$.

В силу (4.84) вектор $\mathbf{g}(x)$ является частным решением неоднородной системы, поэтому он удовлетворяет некоторому дополнительному условию, которое будем выбирать в виде $\mathbf{g}(x)\mathbf{e} = 0$, тогда решение $\mathbf{g}(x)$ системы (4.84), определяется однозначно системой (4.79).

Теперь рассмотрим второе скалярное уравнение системы (26), в которое подставим разложение (4.75) и перепишем с точностью до $O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x)\Phi(w, \tau) + (j\varepsilon w)^2 a(x)\Phi(w, \tau)\mathbf{f}(x)\mathbf{e} = \\ = \Phi(w, \tau) \{ (j\varepsilon w)^2 \mathbf{f}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0) + (j\varepsilon w)^2 \mathbf{r}(x)x\mathbf{I}_0 + \end{aligned}$$

$$+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\mathbf{r}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)+\left.(j\varepsilon w)^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w}\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e}+O(\varepsilon^3).$$

Тогда, применяя равенство (4.67), разделив последнее уравнение на ε^2 , при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим уравнение

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)}=\frac{(jw)^2}{2}\left\{2\mathbf{f}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)+2\mathbf{r}(x)x\mathbf{I}_0+a(x)-\right. \\ \left.-2a(x)\mathbf{f}(x)+\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w}\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\right\}\mathbf{e},$$

в которое подставим разложение (4.82):

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)}=\frac{(jw)^2}{2}\left\{2\mathbf{g}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}+2\mathbf{r}(x)x\mathbf{I}_0\mathbf{e}+a(x)\right\}- \\ +w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\left(\boldsymbol{\varphi}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\right)\mathbf{e}. \quad (4.86)$$

Обозначив

$$b(x)=2\mathbf{g}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}+2x\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}+a(x), \quad (4.87)$$

уравнение (4.86) перепишем в виде

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\left(\boldsymbol{\varphi}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}\right)+\frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau). \quad (4.88)$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\boldsymbol{\varphi}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}.$$

Учитывая (4.85), из последнего выражения запишем

$$\frac{\partial\mathbf{r}(x)}{\partial x}(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}-\mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}. \quad (4.89)$$

Из (4.69) рассмотрим выражение

$$a(x)=\mathbf{r}(x)(\mathbf{B}-x\mathbf{I}_0)\mathbf{e}. \quad (4.90)$$

Продифференцируем $a(x)$ по x , и принимая во внимание, что вектор $\mathbf{r}(x)$ как решение системы (4.67), зависит от x , получим

$$a'(x) = \frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x} (\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0) \mathbf{e} - \mathbf{r}(x)\mathbf{I}_0.$$

Сравнивая последнее равенство и равенство (4.89), уравнение (4.88) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x)w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau), \quad (4.89)$$

которое совпадает с (4.77). **Теорема доказана.**

Функция $b(x)$ имеет смысл коэффициента диффузии того диффузионного процесса, для которого коэффициентом переноса является функция $a(x)$, определяемая равенством (4.69).

Таким образом, определены функции $a(x)$ равенством (4.69) и $b(x)$ равенством (4.78), которые применяются в построении аппроксимации с использованием асимптотически-диффузионного анализа предложенной системы.

Метод асимптотически диффузионного анализа. Реализация метода асимптотически диффузионного анализа для нахождения распределения вероятностей значений предельного при $\sigma \rightarrow 0$ процесса числа $i(t)$ заявок на орбите рассматриваемой RQ-системы реализуется с использованием лемм 4.1. – 4.2 и теоремы 4.3.

4.3.2 Построение дискретного распределения, аппроксимирующего стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.

Ставится задача нахождения аппроксимации дискретного распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой тандемной RQ-системы. Дискретное распределение вероятностей $P_{dif}(i)$, предложенное в (4.33), где коэффициент переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ определяются равенствами (4.69) и (4.78) соответственно, будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой тандемной RQ-системы.

Рассмотрим численные примеры, для этого определим матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & -0.7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

Обозначим ρ ($0 < \rho < 1$) загрузку системы, а значение условных интенсивностей входящего потока – элементов матрицы $\mathbf{\Lambda}$, учитывая условие существования стационарного режима $\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_1 < \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$, определим равенством

$$\mathbf{\Lambda} = \rho \cdot \frac{\mathbf{\Lambda}_1}{\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{e}_1} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \dots$$

Рассмотрим тандемную RQ-систему с экспоненциальным обслуживанием, положив $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ для различных параметров ρ и $\sigma = 0.2$. На рисунках 2 – 4 приведены графики полученных распределений вероятностей $P(i)$ при указанных значениях загрузки ρ .

Рассмотрена тандемная система с повторными вызовами, общей орбитой и входящим ММРР-поток. Для данной системы было определено условие существования стационарного режима. Применяя метод асимптотически диффузионного анализа в условии большой задержки заявок на орбите определен диффузионный процесс, плотность распределения которого позволяет построить аппроксимацию дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите в рассматриваемой тандемной RQ-системе.

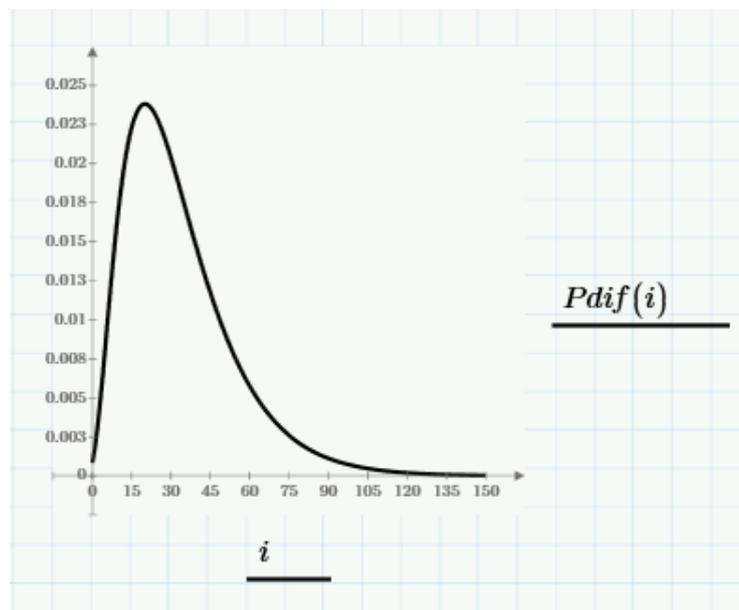
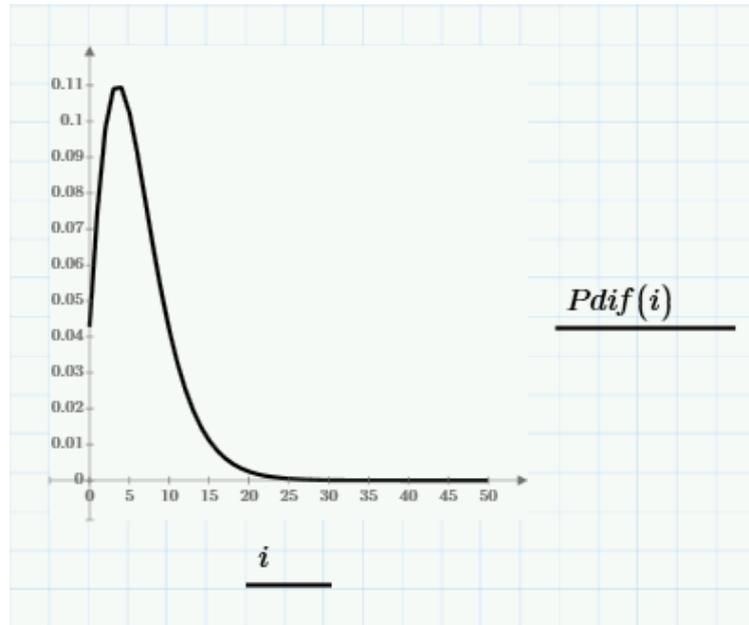
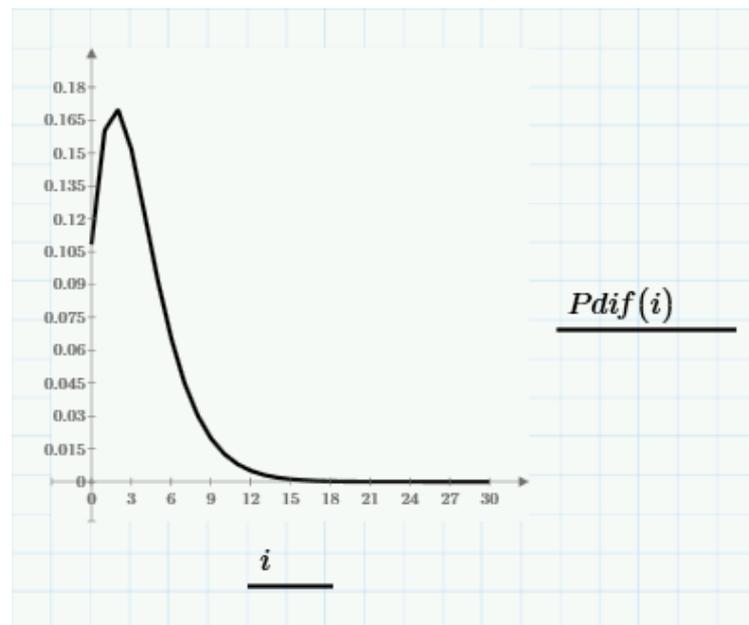


Рисунок 4.1 – Тандемная RQ-система с ММРР входящим потоком, $\rho = 0.95$ $\sigma = 0.2$ Рисунок 4.2 – Тандемная RQ-система с ММРР входящим потоком, $\rho = 0.75$ $\sigma = 0.2$ Рисунок 4.3 – Тандемная RQ-система с ММРР входящим потоком, $\rho = 0.65$ $\sigma = 0.2$

Так как тандемная RQ-система с ММРР входящим потоком является более общей, чем модель с простейшим входящим потоком, интенсивность которого будем определять через интенсивности обслуживания заявок $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2$ приборами и загрузку системы по формуле $\lambda = \rho \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.

Дискретное распределение вероятностей $P_{dif}(i)$ из (4.33) будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы.

Точность аппроксимации $P_{dif}(i)$ определяется с помощью расстояния Колмогорова Δ_1 (4.34), которое показывает разницу между распределениями вероятностей $P_{im}(i)$ и $P_{dif}(i)$, где $P_{im}(i)$ получено с помощью имитационного моделирования, $P_{dif}(i)$ получено в виде (4.33), в котором коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются формулами (4.69) и (4.78) соответственно. Если мы положим все элементы $\lambda = \lambda_k$ в матрице Λ , то мы получим простейший поток с интенсивностью λ . Для сравнения с точностью аппроксимации в виде (3.89) для данной системы, полученной с помощью метода асимптотического анализа зададим расстояние Колмогорова Δ_2 в виде (4.35).

Таблица 4.5 – Расстояния Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 2$	$\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.02$
Δ_2						
$\rho = 0.5$	0.061	0.049	0.011	0.033	0.019	0.013
	0.094	0.101	0.142	0.071	0.034	0.022
$\rho = 0.6$	0.041	0.025	0.027	0.023	0.012	0.009
	0.158	0.134	0.125	0.049	0.039	0.024
$\rho = 0.8$	0.006	0.017	0.030	0.012	0.035	0.011
	0.258	0.224	0.146	0.071	0.036	0.031
$\rho = 0.9$	0.009	0.018	0.021	0.008	0.003	0.004
	0.363	0.305	0.198	0.097	0.074	0.049

Анализируя результаты таблицы 4.5, можно сделать вывод, что аппроксимация, построенная с помощью асимптотически диффузионного анализа в 7,5 раз точнее, чем гауссовская аппроксимация и может быть использован для $\sigma < 1.3$. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой при $\Delta \leq 0.05$, достаточно точной при $\Delta \leq 0.03$ и сверхточной $\Delta \leq 0.01$.

4.4 Резюме

В настоящей главе представлено исследование RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками, с ненадежным прибором и тандемной RQ-системы с общей орбитой. Анализ моделей в данной главе представлен предлагаемым в диссертации методом асимптотически-диффузионного анализа. Построены диффузионные аппроксимации дискретных распределений вероятностей числа заявок на орбите для всех систем. На численных примерах показана точность построенных аппроксимаций, а также проведено сравнение результатов асимптотического и асимптотически-диффузионного анализа, которая определена с помощью расстояния Колмогорова в сравнении с распределением вероятностей, полученным с помощью имитационного моделирования. Численные примеры показывают, что точность асимптотически-диффузионной аппроксимации может быть на порядок выше гауссовской аппроксимации, полученной методом асимптотического анализа предыдущей главы.

Результаты, описанные в данной главе, были представлены в работах [61, 60, 197]. Разработанный метод, который представлен в данной главе, использовался в работах автора [193, 203, 194, 206, 212]

Глава 5 Многолинейные системы с повторными вызовами

В последнее время наблюдаются большие возможности в использовании многолинейных систем с повторными вызовами для моделирования и проектирования систем обработки данных.

Как известно, существует множество модификаций RQ-систем, рассмотренных разными авторами — от обычных однолинейных или многолинейных RQ-систем до RQ-систем с несколькими орбитами, приоритетами, коллизиями и так далее.

В этой главе рассмотрим многолинейные RQ-системы с одной орбитой. К сожалению, точные аналитические решения для таких систем могут быть получены в очень редких случаях. В связи с этим большинство авторов используют численные методы, аппроксимации или имитационное моделирование для изучения таких систем [160, 232]. Применяется новый метод асимптотически-диффузионного анализа для более детального и точного изучения предложенных моделей, что позволяет получить более точные приближения и более широкие области их применения.

Во второй главе в разделе 2.4 были подробно описаны математические модели в виде многолинейных RQ-систем. Для распределения вероятностей состояний таких систем записаны системы уравнений Колмогорова. В данной главе будет применен метод асимптотически диффузионного анализа полученных уравнений в условии большой задержки заявок на орбите. Мы строим диффузионный процесс, который используется для построения аппроксимаций стационарных вероятностных распределений числа занятых приборов и числа заявок на орбите. Используя имитационное моделирование и численные эксперименты, мы определяем область применимости предложенных аппроксимаций.

5.1 Исследование многолинейной RQ-системы $M|H_2|N$

В данном разделе приводится анализ N -линейной RQ-системы с гиперэкспоненциальной функцией распределения времени обслуживания заявок в системе. Для распределения вероятностей трехмерного процесса $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок на орбите, $n_1(t), n_2(t)$ – число приборов, занятых на первой и второй фазах соответственно, составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова. Для компактности записей эта система уравнений записана с применением однородных конечно-разностных операторов по дискретным переменным n_1, n_2 . Для решения составленной системы уравнений применяется метод асимптотически диффузионного анализа в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ (растущего времени пребывания заявки на орбите). Будут найдены асимптотические (предельные) распределения вероятностей $R(n_1, n_2)$ числа приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания и предельная плотность распределения вероятностей нормированного числа заявок на орбите. Точность предлагаемых аппроксимаций определяется компьютерными экспериментами сравнения найденных в работе распределений с распределениями, полученными на имитационной модели рассматриваемой RQ-системы с гиперэкспоненциальным распределением времени обслуживания на каждом приборе.

5.1.1 Метод асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы $M|H_2|N$

Первый этап асимптотического анализа. Обозначив $\sigma = \varepsilon$ и выполнив замены

$$\tau = t\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon), \quad (5.1)$$

систему (2.68) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{E} &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{B} + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Решение $\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}(w, \tau)$, и предел производных по w $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w}$ и по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial \tau}$. Решая систему (5.2) в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$ докажем следующее утверждение.

Теорема 5.1 В рассматриваемой многолинейной RQ-системе $M|H_2|N$ компоненты $R(n_1, n_2, x)$ предельной при $\varepsilon \rightarrow 0$ матрицы $\mathbf{R}(x)$ вероятностей состояний n_1 и n_2 приборов определяются равенствами

$$\begin{aligned} R(n_1, n_2, x) &= \frac{\rho_1(x)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\rho_2(x)^{n_2}}{n_2!} R(0, 0, x), \\ R(0, 0, x) &= 1 / \sum_{n_1+n_2 \leq N} \frac{\rho_1(x)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\rho_2(x)^{n_2}}{n_2!}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь

$$\rho_1(x) = q_1 \frac{(\lambda + x)}{\mu_1}, \quad \rho_2(x) = q_2 \frac{(\lambda + x)}{\mu_2}, \quad (5.4)$$

$x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau) = \mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I}_0)\mathbf{E}. \quad (5.5)$$

Доказательство. В системе (5.2) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w, \tau)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{E} &= jw \left\{ \mathbf{F}(w, \tau)\mathbf{B} + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \right\} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Решение системы (10) будем искать в виде

$$\mathbf{F}(w, \tau) = \mathbf{R}(x)e^{jwx(\tau)}. \quad (5.7)$$

Здесь $\mathbf{R}(x)$ – предельная при $\varepsilon \rightarrow 0$ матрица вероятностей $R(n_1, n_2, x)$ приборов, а $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ , которая определяет при $\varepsilon \rightarrow 0$ нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$ среднее значение $\varepsilon i(\tau)$ – числа заявок на орбите. Подставим решение (5.7) в систему (5.6), получим

$$\mathbf{R}(x)\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\tau)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} = 0, \quad (5.8)$$

$$x'(\tau) = \mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I}_0)\mathbf{E}. \quad (5.9)$$

Равенство (5.8) для компонент $R(n_1, n_2, x)$ матрицы $\mathbf{R}(x)$ является однородной системой линейных алгебраических уравнений, решение $R(n_1, n_2, x)$ которой зависит от значений x функции $x(\tau)$.

Равенство (5.9), совпадающее с (5.5), является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $x(\tau)$. Найдя решение $\mathbf{R}(x)$ системы (5.8), подставив его в скалярное уравнение (5.9), обозначим

$$a(x) = \mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I}_0)\mathbf{E}. \quad (5.10)$$

Ниже будет показано, что эта функция имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите.

Решим систему (5.8). Запишем для компонент $R(n_1, n_2, x)$ матрицы $\mathbf{R}(x)$ однородное матричное уравнение (5.8) в виде однородной системы линейных алгебраических уравнений

при $n_1 + n_2 \leq N - 1$:

$$q_1(\lambda + x)R(n_1 - 1, n_2, x) + q_2(\lambda + x)R(n_1, n_2 - 1, x) - \{\lambda + x + n_1\mu_1 + n_2\mu_2\}R(n_1, n_2, x) + (n_1 + 1)\mu_1 R(n_1 + 1, n_2, x) + (n_2 + 1)\mu_2 R(n_1, n_2 + 1, x) = 0,$$

При $n_1 + n_2 = N$:

$$q_1(\lambda + x)R(n_1 - 1, n_2, x) + q_2(\lambda + x)R(n_1, n_2 - 1, x) - \{n_1\mu_1 + n_2\mu_2\}R(n_1, n_2, x) = 0.$$

Обозначим

$$\rho_1(x) = q_1 \frac{\lambda + x}{\mu_1}, \quad \rho_2(x) = q_2 \frac{\lambda + x}{\mu_2}. \quad (5.11)$$

Применяя (5.11) и подставляя выражения (5.3) в последнюю однородную систему уравнений, получим тождественные равенства, которые доказывают справедливость равенств (5.3). Здесь $R(n_1, n_2, x)$ имеют смысл предельных при $\sigma \rightarrow 0$ ве-

роятностей того, что в рассматриваемой N -линейной RQ-системе заняты n_1 приборов на первой фазе с интенсивностью обслуживания μ_1 и n_2 приборов на второй фазе с интенсивностью обслуживания μ_2 .

Корректность применения условия нормировки в (5.3) не требует обоснования. Теорема доказана.

Следствие 5.1 Пусть

$$r(x) = \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x), \quad (5.12)$$

тогда функцию $a(x)$ из (5.10) можно записать в виде

$$a(x) = (\lambda + x(\tau))r(x) - x(\tau). \quad (5.13)$$

Доказательство. Равенство (5.10), которое определяет значение функции $a(x)$ с помощью операторов \mathbf{B} , \mathbf{I}_0 , \mathbf{E} перепишем в виде

$$\begin{aligned} a(x) &= \mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I}_0)\mathbf{E} = \mathbf{R}(x)\mathbf{B}\mathbf{E} - x(\tau)\mathbf{R}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{E} = \\ &= \lambda \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) - x \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x) = \\ &= \lambda \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) - x \left(\sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x) - \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) \right) = \\ &= (\lambda + x) \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) - x \sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x). \end{aligned}$$

Применяя обозначение (5.12) в первом слагаемом и условие нормировки во втором получим равенство (5.13). **Следствие доказано.**

Второй этап асимптотического анализа. Учитывая вид предельной характеристической функции $e^{j\omega x(\tau)}$ нормированного числа $\frac{1}{\sigma}i(\sigma t)$ из (5.7), сделаем следующие замены в исходной системе уравнений (5.2)

$$\mathbf{H}(u, t) = e^{\frac{j\omega}{\sigma}x(\sigma t)} \mathbf{H}^{(2)}(u, t),$$

Для матричной функции $\mathbf{H}^{(1)}(u, t)$, учитывая обозначение (5.10), получим систему

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)\mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \left(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1) \right) + \\
& \quad + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1), \\
& \quad \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} \mathbf{E} + jua(x)\mathbf{H}^{(2)}(u, t)\mathbf{E} = \\
& = (e^{ju} - 1) \left(\mathbf{H}^{(2)}(u, t) [\mathbf{B} - e^{-ju}x\mathbf{I}_0] + e^{-ju}j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \right) \mathbf{E}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ и выполнив замены

$$\tau = t\varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \quad (5.15)$$

систему (5.14) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1) \right) + \\
& \quad + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1), \\
& \quad \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{E} + j\varepsilon wa(x)\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)\mathbf{E} = \\
& = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left(\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) [\mathbf{B} - e^{-j\varepsilon w}x\mathbf{I}_0] + e^{-j\varepsilon w}j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \right) \mathbf{E}. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Решение $\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)$ и предел производных по w

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)}{\partial w}$ и по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)}{\partial \tau}$. Докажем следующее

утверждение.

Теорема 5.2 *Функция $\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)$ имеет вид*

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau) = \Phi(w, \tau)\mathbf{R}(x), \quad (5.17)$$

где матрица $\mathbf{R}(x)$, зависящая от значений параметра x , определена в Теореме 5.1 своими компонентами $R(n_1, n_2, x)$, а скалярная функция $\Phi(w, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x)w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau). \quad (5.18)$$

Здесь функция $a(x)$ определяется равенством (5.10), а скалярная функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = a(x) + 2\mathbf{g}(x)[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} + 2x\mathbf{R}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}, \quad (5.19)$$

где матрица $\mathbf{g}(x)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) &= a(x)\mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(x)(x\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}), \\ \mathbf{g}(x)\mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы (5.19) с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} j\varepsilon w a(x)\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w\mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w\mathbf{I}_1)) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau)\{\mathbf{R}(x) + j\varepsilon w\mathbf{f}(x)\} + O(\varepsilon^2), \quad (5.21)$$

где $\Phi(w, \tau)$ – некоторая скалярная функция, вид которой определим ниже. Получим

$$\begin{aligned} j\varepsilon w a(x)\Phi(w, \tau)\mathbf{R}(x) &= \Phi(w, \tau)\{\mathbf{R}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \\ &+ j\varepsilon w[\mathbf{f}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1)]\} + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w}\mathbf{R}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство (5.8), разделим последнее уравнение на $j\varepsilon$ и устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$a(x)\mathbf{R}(x) = \mathbf{f}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1) + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}\mathbf{R}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1),$$

последнее равенство перепишем в виде неоднородного уравнения:

$$\mathbf{f}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) =$$

$$= a(x)\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1) + \frac{\partial\Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)} \mathbf{R}(x)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0). \quad (5.22)$$

Общее решение $\mathbf{f}(x)$ этого уравнения запишем в виде

$$\mathbf{f}(x) = C\mathbf{R}(x) + \mathbf{g}(x) - \boldsymbol{\varphi}(x) \frac{\partial\Phi(w, \tau) / \partial w}{w\Phi(w, \tau)}, \quad (5.23)$$

которое подставим в (5.22), получим матричные уравнения

$$\boldsymbol{\varphi}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = \mathbf{R}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1), \quad (5.24)$$

$$\mathbf{g}(x)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = a(x)\mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(x)(x\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}). \quad (5.25)$$

Отметим, что уравнение (5.25), определяющее матрицу $\mathbf{g}(x)$, совпадает с первым уравнением (5.20), следовательно, утверждение (5.25) формулировки теоремы верно.

Теперь рассмотрим уравнение (5.8). Продифференцируем его по x , получим равенство:

$$\frac{\partial\mathbf{R}(x)}{\partial x} \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \} + \mathbf{R}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0.$$

Учитывая последнее уравнение и уравнение (5.24) для $\boldsymbol{\varphi}(x)$, запишем важное равенство:

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \frac{\partial\mathbf{R}(x)}{\partial x}, \quad (5.26)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(x)\mathbf{E} = 0$.

В силу (5.25) матрица $\mathbf{g}(x)$ является частным решением неоднородной системы, поэтому она удовлетворяет некоторому дополнительному условию, которое будем выбирать в виде $\mathbf{g}(x)\mathbf{E} = 0$, тогда решение $\mathbf{g}(x)$ системы (5.25), удовлетворяющее условию $\mathbf{g}\mathbf{E} = 0$, определяется однозначно в виде (5.20).

Теперь рассмотрим второе скалярное уравнение системы (5.16), в которое подставим разложение (5.21) и перепишем с точностью до $O(\varepsilon^3)$:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial\Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x)\Phi(w, \tau) \{1 + j\varepsilon w \mathbf{f}(x)\} \mathbf{E} =$$

$$= \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) \left(\Phi(w, \tau) \{ \mathbf{R}(x) + j\varepsilon w \mathbf{f}(x) \} [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \right) \mathbf{E} + \\ + O(\varepsilon^3),$$

Тогда применяя равенство (5.10)

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \\ = \Phi(w, \tau) \left((j\varepsilon w)^2 \{ \mathbf{f}(x) (\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0) + x\mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 - a(x) \mathbf{f}(x) \} + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{R}(x) (\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0) \right) \mathbf{E} + \\ + (j\varepsilon)^2 w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{E}.$$

Получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = \\ = \frac{(jw)^2}{2} \{ 2(\mathbf{f}(x) [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] + \mathbf{R}(x) x \mathbf{I}_0 - a(x) \mathbf{f}(x)) \mathbf{E} + a(x) \} - w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{E},$$

в которое подставим решение (5.23)

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = \frac{(jw)^2}{2} \{ 2\mathbf{g}(x) [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] \mathbf{E} + 2\mathbf{R}(x) x \mathbf{I}_0 \mathbf{E} + a(x) \} + \\ + w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \{ \boldsymbol{\varphi}(x) [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] - \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \} \mathbf{E}. \quad (5.27)$$

Обозначив

$$b(x) = a(x) + 2\mathbf{g}(x) [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] \mathbf{E} + 2x\mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{E}, \quad (5.28)$$

уравнение (5.27) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \{ \boldsymbol{\varphi}(x) [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] - \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \} \mathbf{E} + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau). \quad (5.29)$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\boldsymbol{\varphi}(x) [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] \mathbf{E} - \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{E}.$$

Применяя (5.26) к последнему равенству, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] \mathbf{E} - \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{E}. \quad (5.30)$$

Рассмотрим выражения $a(x)$ из (5.10)

$$a(x) = \mathbf{R}(x) \mathbf{B} \mathbf{e} - x \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{e}, \quad (5.31)$$

Продифференцируем $a(x)$ по x , и принимая во внимание, что матрица $\mathbf{R}(x)$ как решение системы (5.8), зависит от x , получим

$$a'(x) = \frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} \mathbf{B} \mathbf{E} - x \frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} \mathbf{I}_0 \mathbf{E} - \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} (\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0) \mathbf{E} - \mathbf{R}(x) \mathbf{I}_0 \mathbf{E}$$

Сравнивая последнее равенство и равенство (35), уравнение (34) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau), \quad (5.32)$$

которое совпадает с (5.18). **Теорема доказана.**

Следствие 5.2 Пусть $g_1(x) = \sum_{n_1+n_2=N} g(n_1, n_2, x)$, $r(x) = \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x)$, тогда

функцию $b(x)$, определяемую равенством (5.19), можно записать в виде

$$b(x) = a(x) + 2 \left[x(1 - r(x)) + (\lambda + x) g_1(x) \right]. \quad (5.33)$$

Доказательство. Равенство (5.19) $b(x) = a(x) + 2\mathbf{g}(x)[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{E} + 2x\mathbf{R}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{E}$, определяющее значения функции $b(x)$ с помощью операторов \mathbf{B} , \mathbf{I}_0 и \mathbf{E} перепишем в скалярном виде:

$$\begin{aligned} b(x) &= a(x) + 2 \left[\lambda \sum_{n_1+n_2=N} g(n_1, n_2, x) + x \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} g(n_1, n_2, x) - x \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x) \right] = \\ &= a(x) + 2 \left[\lambda g_1(x) + x \left(1 - x \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) \right) - x \left(\sum_{n_1+n_2 \leq N} g(n_1, n_2, x) - g_1(x) \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь, применяя условие $\mathbf{g}(x)\mathbf{E} = 0$, получим равенство

$$b(x) = a(x) + 2 \left[x(1 - r(x)) + (\lambda + x) g_1(x) \right],$$

совпадающее с (5.33). **Следствие доказано.**

Ниже будет показано, что функция $b(x)$ имеет смысл коэффициента диффузии того диффузионного процесса, для которого коэффициентом переноса является функция $a(x)$, определяемая равенством (5.10).

Таким образом, определены функции $a(x)$ равенством (5.10) и $b(x)$ равенством (5.19). Ниже будет показано их применение в методе асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы $M|H_2|N$.

Метод асимптотически диффузионного анализа. В результате обозначения $\sigma = \varepsilon^2$ и замен $\tau = t\varepsilon^2$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)$, в системе уравнений для матричной функции $\mathbf{H}^{(2)}(u, t)$, рассмотрен предельный при $\sigma \rightarrow 0$ случайный процесс

$$\sqrt{\sigma} \left\{ i(\sigma t) - \frac{1}{\sigma} x(\sigma t) \right\} = \sqrt{\sigma} \left\{ i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right\},$$

где $i(\tau)$ – число заявок на орбите, а функция $x(\tau)$ определена выше как решение дифференциального уравнения $x'(\tau) = a(x)$. Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 5.1 *Предельный при $\sigma \rightarrow 0$ случайный процесс*

$$y(\tau) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sqrt{\sigma} \left\{ i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right\}$$

является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = a'(x)y d\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau), \quad (5.34)$$

зависящего от значений непрерывного параметра x .

Доказательство леммы 5.1 аналогично доказательству лемме 4.1.

Как указано выше, $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$. Рассмотрим случайный процесс

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \quad (5.35)$$

Лемма 5.2 *Случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения*

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau) \quad (5.36)$$

с точностью до бесконечно малых $O(\varepsilon^2)$.

Доказательство леммы 5.2 аналогично доказательству лемме 4.2.

Рассмотрим стационарную плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$, т.е. будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, тогда

$$s(z, \tau) = s(z) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}. \quad (5.37)$$

Теорема 5.3 *Стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$ имеет вид:*

$$s(z) = \frac{C}{b(z)} \exp\left\{\frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx\right\}, \quad (5.38)$$

где C – нормирующая константа.

Доказательство теоремы 5.3 аналогично доказательству теоремы 4.3.

5.1.2 Построение дискретного распределения, аппроксимирующего стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите

В результате проведенных исследований доказано, что в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ стационарное трехмерное распределение вероятностей

$$P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, i(t) = i\} = P(n_1, n_2, i, t)$$

можно представить в виде произведения в стационарном виде

$$P(n_1, n_2, i) = R(n_1, n_2)P(i)$$

двумерного распределения $R(n_1, n_2)$ числа приборов, занятых на первой и второй фазах гиперэкспоненциального распределения вероятностей времени обслуживания заявки в RQ-системе $M|H_2|N$ и одномерного распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите.

Так как в стационарном режиме дифференциальное уравнение (5.10) обращается в равенство

$$a(x) = 0, \quad (5.39)$$

которое является уравнением относительно x , то его положительное решение обозначим $x = \kappa$, а значения вероятностей $R(n_1, n_2)$, в силу (5.3), определим равенством

$$R_1(n_1, n_2) = R_1(n_1, n_2, \kappa), \quad (5.40)$$

где переменную x полагаем равной k . Вероятность того, что в N -линейной системе занято n приборов при $x = k$ обозначим $R_1(n)$.

Для построения аппроксимации $P_1(i)$ для дискретного распределения $P(i)$ вернемся к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$. В допредельной ситуации процесс $z(\tau)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} z(\tau) &= x(\tau) + \varepsilon y(\tau) = x(\tau) + \sqrt{\sigma} \left\{ \sqrt{\sigma} \left[i(\tau) - \frac{1}{\sigma} x(\tau) \right] \right\} = \\ &= x(\tau) + \sigma i(\tau) - x(\tau) = \sigma i(\tau). \end{aligned}$$

Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P_1(i)$ дискретного случайного процесса $\sigma i(\tau)$ можно осуществить разными способами. Укажем один из них. В силу равенства (5.38), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде:

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}. \quad (5.41)$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей

$$P_1(i) = G(i) / \sum_{i=0}^{\infty} G(i). \quad (5.42)$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $P_1(i)$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P(i(t) = i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы.

Найденное распределение позволяет получить еще одну, кроме (5.40) аппроксимацию, распределение вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазах.

В равенстве (5.3) значения детерминированной переменной x заменим значениями случайного процесса z и применяя (5.42) усредним по этим значениям, получим

$$R_2(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^{\infty} R(n_1, n_2, \sigma i) P_1(i), \quad (5.43)$$

где $R(n_1, n_2, x)$ определяется равенством (5.3). Вероятность того, что в N -линейной системе занято n приборов, в случае, когда значения x заменены значениями случайного процесса z , обозначим $R_2(n)$.

Точность предлагаемых аппроксимаций (5.40), (5.42), (5.43) будет проиллюстрирована на численных примерах, где будет показана их высокая точность и применимость для широкого спектра значений сетевых параметров σ , λ , μ_1 , μ_2 и q_1 рассматриваемой RQ-системы.

5.1.3 Точность предлагаемых аппроксимаций для системы $M|H_2|N$ при гиперэкспоненциальном распределении времени обслуживания

Для исследования точности предлагаемых аппроксимаций для распределения вероятностей $R(n)$ числа n занятых приборов и для распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите (5.42) N -линейной RQ-системы $M|H_2|N$ с гиперэкспоненциальным обслуживанием была разработана имитационная модель этой RQ-системы.

Будем полагать среднее значение времени обслуживания равным единице. В численных примерах рассмотрим пятилинейные RQ-системы, когда $N = 5$.

Обозначим ρ ($0 < \rho < 1$) загрузку системы, а значение λ интенсивности входящего потока определим равенством $\lambda = \rho N$. Рассмотрим RQ-систему с гиперэкспоненциальным обслуживанием, положив $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 3$, $q_1 = 0.4$, $q_2 = 0.6$ при указанных в таблицах значениях параметров ρ и σ . В Таблице 5.1 приведены значения расстояний Колмогорова

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq n \leq 5} \left| \sum_{v=0}^n R_1(v) - R(v) \right|, \quad \Delta_2 = \max_{0 \leq n \leq 5} \left| \sum_{v=0}^n R_2(v) - R(v) \right|$$

между распределением вероятностей $R(n)$, полученного реализацией имитационной модели и аппроксимациями $R_1(n)$ и $R_2(n)$ этого распределения, полученного по формулам (46) и (49).

Таблица 5.1 – Расстояния Колмогорова для аппроксимаций $R_1(n)$ и $R_2(n)$ числа занятых приборов

	Δ	$\sigma = 2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\rho = 0.6$	Δ_1	0.044	0.032	0.020	0.011	0.006
	Δ_2	0.059	0.053	0.042	0.019	0.008
$\rho = 0.7$	Δ_1	0.065	0.046	0.030	0.015	0.009
	Δ_2	0.083	0.063	0.038	0.013	0.003
$\rho = 0.8$	Δ_1	0.078	0.056	0.037	0.019	0.011
	Δ_2	0.075	0.050	0.025	0.005	0.002
$\rho = 0.9$	Δ_1	0.073	0.049	0.030	0.015	0.008
	Δ_2	0.045	0.021	0.008	0.001	0.001

Анализируя результаты в Таблице 5.1, видно, что для значений $\rho \leq 0.7$ более предпочтительной оказывается первая аппроксимация $R_1(n)$, полученная по формуле (5.40). При $\rho > 0.7$ предпочтительнее выглядит вторая аппроксимация $R_2(n)$, полученная по формуле (5.43). Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

При уменьшении значений σ точность аппроксимаций возрастает (Δ уменьшается), а при $\sigma \leq 1$ всегда можно выбрать ту аппроксимацию, для которой величина $\Delta \leq 0.05$, а, следовательно, эта аппроксимация приемлема по точности, как это мы указывали выше.

В Таблице 5.2 приведены значения расстояний Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i P_1(v) - P(v) \right|$$

между распределениями вероятностей $P_1(i)$, полученного по формуле (5.42) и $P(i)$, полученного реализацией имитационной модели.

Таблица 5.2 – Расстояния Колмогорова для аппроксимации $P_1(i)$ числа заявок на орбите

	$\sigma = 2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\rho = 0.6$	0.085	0.129	0.141	0.082	0.039
$\rho = 0.7$	0.122	0.122	0.081	0.027	0.014
$\rho = 0.8$	0.104	0.070	0.032	0.011	0.014
$\rho = 0.9$	0.052	0.022	0.003	0.012	0.010

Из табличных значений следует, что точность предлагаемой в (5.42) аппроксимации возрастает (Δ уменьшается) с уменьшением величины σ , которая в теоретических исследованиях полагалась бесконечно малой. Здесь же расстояние Колмогорова $\Delta \leq 0.05$ для всех значений сетевых параметров σ и ρ правого нижнего угла таблицы. При $\rho = 0.9$ это неравенство выполняется при всех значениях $\sigma \leq 1$, что говорит о высокой точности предлагаемой в (5.42) аппроксимации $P_1(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой пятилинейной RQ-системы с гиперэкспоненциальным обслуживанием заявок при заданных значениях $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 3$, $q_1 = 0.4$.

5.2 Исследование N -линейной RQ-системы со специальным обслуживанием

В данном разделе рассмотрим многолинейную систему с повторными вызовами и специальным обслуживанием, описанную в разделе 2.4.2 Главы 2. Следует отметить, что для подобных систем даже без времени настройки работы сервера очень трудно получить аналитические результаты. Предполагается, что сервер может быть недоступен для обслуживания заявок, при этом он требует времени настройки и продолжает потреблять энергию. Многолинейные RQ-системы со специальным обслуживанием хорошо описывают такие ситуации. Предложена реализация асимптотически-диффузионного метода, с помощью которого найдено непрерывное предельное распределение, применяя которое, получена достаточно

точная аппроксимация для допредельного дискретного распределения вероятностей состояний рассматриваемой многолинейной RQ-системы со специальным обслуживанием.

5.2.1 Метод асимптотически-диффузионного анализа многолинейной RQ-системы M|M, M|N с двухфазным специальным обслуживанием

Первый этап асимптотического анализа. Обозначив $\sigma = \varepsilon$ и выполнив в системе (2.72) замены

$$\tau = t\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon),$$

систему (2.72) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \lambda \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{E}) &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ \lambda \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{E}_1 + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial}{\partial w} (\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{E}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Обозначим $\mathbf{R}(x)$ – матрицу вероятностей $R(n_1, n_2, x)$, где $x = x(\tau)$ – скалярная функция, которую мы определим ниже. Компоненты $R(n_1, n_2, x)$ матрицы $\mathbf{R}(x)$ имеют смысл предельных при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятностей того, что в рассматриваемой RQ-системе n_1 приборов заняты на первой, а n_2 приборов на второй фазах обслуживания.

Решение $\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}(w, \tau)$, и предел производных по w $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w}$ и по τ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial \tau}$. Решая систему (5.44) в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\sigma \rightarrow 0$) докажем следующее утверждение.

Теорема 5.4 В предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sigma i \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)} = e^{jwx(\tau)}, \quad (5.45)$$

где скалярная функция $x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau) = \mathbf{R}(x)(\lambda \mathbf{E}_1 - x(\tau) \mathbf{E}_2), \quad (5.46)$$

компоненты $R(n_1, n_2, x)$ матрицы $\mathbf{R}(x)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x) = \mathbf{R}(x) \mathbf{E} = 1, \quad (5.47)$$

и являются решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{R}(x) \{ \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} - x(\tau) (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \} = 0. \quad (5.48)$$

Доказательство. В системе (5.44) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(w, \tau) (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{F}(w, \tau) \mathbf{E}) &= jw \left\{ \lambda \mathbf{F}(w, \tau) \mathbf{E}_1 + j \frac{\partial}{\partial w} \mathbf{F}(w, \tau) \mathbf{E}_2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Решение системы (5.49) будем искать в виде произведения

$$\mathbf{F}(w, \tau) = \mathbf{R}(x) e^{jwx(\tau)}. \quad (5.50)$$

Здесь $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ , которая определяет при $\varepsilon \rightarrow 0$, нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$, среднее значение $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите. Подставим решение (5.50) в систему (5.49), получим

$$\mathbf{R}(x) \{ \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} - x(\tau) (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \} = 0, \quad (5.51)$$

$$x'(\tau) = \mathbf{R}(x) (\lambda \mathbf{E}_1 - x(\tau) \mathbf{E}_2). \quad (5.52)$$

В силу того, что скалярная функция $x(\tau)$ аргумента τ , является предельным при $\varepsilon \rightarrow 0$, нормированным величиной $\varepsilon = \sigma$, средним значением $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите, то выполняется равенство (5.45). **Теорема доказана.**

Найдя решение $\mathbf{R}(x)$ системы (5.51), подставив его в скалярное уравнение (5.52), обозначим

$$a(x) = \mathbf{R}(x) (\lambda \mathbf{E}_1 - x(\tau) \mathbf{E}_2). \quad (5.53)$$

При исследовании RQ-систем методом асимптотически диффузионного анализа, функция $a(x)$ играет важную роль. В доказанной теореме 5.4 показано, что $a(x) = x'(\tau)$, поэтому функция $a(x)$ определяет динамику процесса $x(\tau)$, предельного при $\sigma \rightarrow 0$ для нормированного числа $\sigma i(\tau/\sigma)$ заявок на орбите.

Ниже будет показано, что эта функция $a(x)$ имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите рассматриваемой RQ-системы. Применяя функцию $a(x)$, получим условие существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе.

Условие существования стационарного режима. В силу равенства (5.53), если $a(0) > 0$ значения процесса $x(\tau)$, определяемого равенством $a(x) = x'(\tau)$, возрастают в окрестности $x = 0$. Если $a(x) > 0$ при всех значениях x , то в рассматриваемой RQ-системе не существует стационарного режима.

Так как стационарный режим существует, если выполнено неравенство $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) < 0$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 5.5 Условием существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе является неравенство:

$$\lambda < N\mu_2 \frac{(N-1)\mu_2 + \mu_1}{N\mu_2 + \mu_1}. \quad (5.54)$$

Доказательство. Найдем предельное при $x \rightarrow \infty$ значение функции $a(x)$. В силу (5.53), функция $a(x)$ определяется равенством $a(x) = \mathbf{R}(x)(\lambda \mathbf{E}_1 - x(\tau)\mathbf{E}_2)$, где операторы суммирования \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 определены выше, а указанное равенство перепишем для компонент $R(n_1, n_2)$ в виде:

$$a(x) = \lambda \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) - x(\tau) \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x) \quad (5.55)$$

Для того, чтобы найти предельное значение $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)$, установим предельное при $x \rightarrow \infty$ свойства вероятностей $R(n_1, n_2, x)$, определяемых равенствами (5.47) и (5.48).

Для наглядности, на рисунке изображен граф интенсивностей переходов, определяющий вероятности $R(n_1, n_2, x)$.

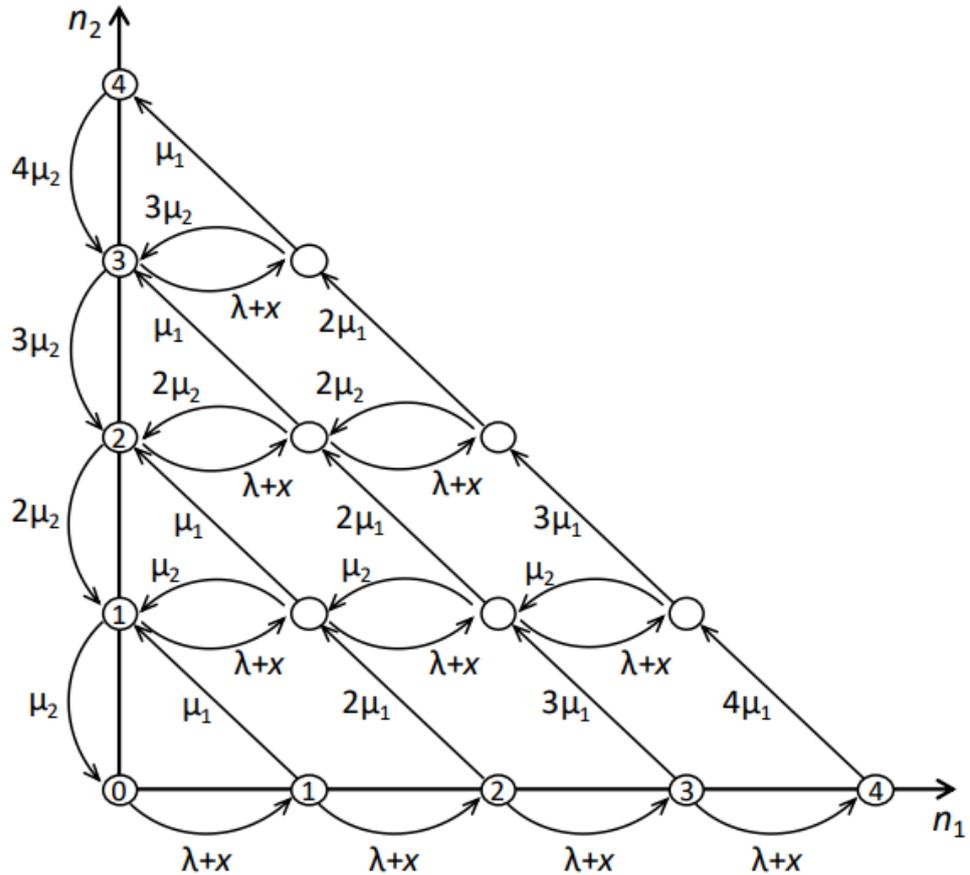


Рисунок 5.1 – Граф интенсивностей переходов, определяющих вероятности $R(n_1, n_2, x)$

Применяя метод сечений графа, для этих вероятностей составим равенства, которые линейными преобразованиями также можно получить из системы (5.51), но гораздо нагляднее эти равенства получаются методом сечения графа. Для диагональных сечений при $n_1 + n_2 = n \leq N - 1$ составим равенства

$$(\lambda + x) \sum_{n_1+n_2=n} R(n_1, n_2, x) = \mu_2 \sum_{n_1=1}^{n+1} n_2 R(n_1 + 1 - n_2, n_2, x), \quad (5.56)$$

из которых следует, что в пределе при $x \rightarrow \infty$ все вероятности $R(n_1, n_2, x)$ при $n_1 + n_2 \leq N - 1$ равны нулю, а в силу условия нормировки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) = 1, \quad (5.57)$$

и все предельные ненулевые вероятности $R(n_1, n_2)$ лежат на диагонали $n_1 + n_2 = N$.

Более того, из равенств (5.56) следует, что суммы $\sum_{n_1+n_2=n} R(n_1, n_2, x)$ при $n \leq N-1$ яв-

ляются бесконечно малыми порядка $\left(\frac{1}{x}\right)^{N-n}$.

Для горизонтальных сечений запишем равенства

$$N\mu_2 R(0, N, x) = \mu_1 R(1, N-1, x),$$

$$n\mu_2 R(0, n_2, x) = \mu_1 \sum_{n_1=1}^{N-(n_2-1)} n_1 R(n_1, n_2-1, x), \text{ при } n_2 \leq N-1.$$

Так как при $n_2 \leq N-1$ вероятности $R(0, n_2, x)$, лежащие на диагоналях $n_1 + n_2 = n \leq N-1$, при $x \rightarrow \infty$, являются бесконечно малыми порядка $\left(\frac{1}{x}\right)^{N-n_2}$, то

также являются малыми порядка $\left(\frac{1}{x}\right)^{N-n_2}$ и суммы $\sum_{n_1=1}^{N-(n_2-1)} R(n_1, n_2-1, x)$. То есть при

$n_2 = N-1$, сумма $R(1, N-2, x) + R(2, N-2, x)$ в том числе и краевая вероятность

$R(2, N-2, x)$ имеют порядок малости $\frac{1}{x}$. При $n_2 \leq N-2$ суммы $\sum_{n_1=1}^{N-(n_2-1)} R(n_1, n_2-1, x)$,

в том числе, и краевые вероятности $R(N-(n_2-1), n_2-1, x)$ являются бесконечно

малыми $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ и более высокого порядка.

Следовательно, в пределе, при $x \rightarrow \infty$, отличаются от нуля только две предельные вероятности $R(0, N)$ и $R(1, N-1)$, которые совместно с условием нормировки являются решением системы двух уравнений

$$N\mu_2 R(0, N) = \mu_1 R(1, N-1),$$

$$R(0, N) + R(1, N-1) = 1.$$

Решение этой системы имеет вид:

$$R(0, N) = \frac{\mu_1}{N\mu_2 + \mu_1}, \quad R(1, N-1) = \frac{N\mu_2}{N\mu_2 + \mu_1}. \quad (5.58)$$

Как указано выше, сумма $R(1, N-2, x) + R(2, N-2, x)$ является бесконечно малой порядка $\frac{1}{x}$. Запишем уравнение для вероятности $R(2, N-2, x)$:

$$-\left[2\mu_1 + (N-2)\mu_2\right]R(2, N-2, x) + (\lambda + x)R(1, N-2, x) + 3\mu_1R(3, N-3, x) = 0. \quad (5.59)$$

Здесь вероятность $R(3, N-3, x)$ является бесконечно малой порядка $\left(\frac{1}{x}\right)^2$, следовательно вероятность $R(1, N-2, x)$, которая в равенстве домножается на x , является бесконечно малой также порядка $\left(\frac{1}{x}\right)^2$, лишь в этом случае будет выполняться равенство (5.59), а сумма $R(1, N-2, x) + R(2, N-2, x)$ будет являться бесконечно малой порядка $\frac{1}{x}$. Следовательно, при $n_1 + n_2 \leq N-1$ только одна вероятность $R(0, N-1, x)$ имеет порядок малости $\frac{1}{x}$, остальные вероятности $R(n_1, n_2, x)$ являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем $\frac{1}{x}$.

Запишем уравнение для вероятности $R(0, N-1, x)$

$$\begin{aligned} & \left[\lambda + x + (N-1)\mu_2\right]R(0, N-1, x) = \\ & = N\mu_2R(0, N, x) + (N-1)\mu_2R(1, N-1, x) + \mu_1R(1, N-2, x) = 0, \end{aligned}$$

И выполним здесь предельный переход при $x \rightarrow \infty$, получим равенство:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xR(0, N-1, x) = N\mu_2 R(0, N-1) + (N-1)\mu_2 R(1, N-1),$$

которое, в силу (5.58), перепишем в виде

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xR(0, N-1, x) = N\mu_2 \frac{(N-1)\mu_2 + \mu_1}{N\mu_2 + \mu_1}. \quad (5.60)$$

Вернемся к функции $a(x)$, определяемой равенством (5.55). Найдем предельное при $x \rightarrow \infty$ значение функции $a(x)$. В силу (5.57) и (5.60) можно записать

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = \lambda - N\mu_2 \frac{(N-1)\mu_2 + \mu_1}{N\mu_2 + \mu_1}.$$

Неравенство $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) < 0$, определяющее условие существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе выполняется при выполнении равенства (5.54). **Теорема доказана.**

На первом этапе асимптотического анализа, аналогично закону больших чисел, было получено равенство (5.45), определяющее сходимость при $\sigma \rightarrow 0$ характеристической функции нормированного случайного процесса $\sigma i(\tau/\sigma)$ к детерминированной функции $x(\tau)$. Для более детального исследования числа $i(t)$ заявок на орбите реализуем второй этап асимптотического анализа.

Второй этап асимптотического анализа. В исходной системе уравнений (2.72) сделаем следующую замену

$$\mathbf{H}(u, t) = e^{\frac{j u}{\sigma} x(\sigma t)} \mathbf{H}^{(2)}(u, t), \quad (5.61)$$

для матричной функции $\mathbf{H}^{(2)}(u, t)$, учитывая обозначение (5.53), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} + j u a(x) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) &= \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \left(\mathbf{A} + e^{j u} \lambda \mathbf{B} - x \left(\mathbf{I}_0 - e^{-j u} \mathbf{I}_1 \right) \right) + \\ &+ j \sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} \left(\mathbf{I}_0 - e^{-j u} \mathbf{I}_1 \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{H}^{(2)}(u, t) \mathbf{E} \right) + j u a(x) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \mathbf{E} &= \left(e^{j u} - 1 \right) \times \\ \times \left\{ \left(\lambda \mathbf{E}_1 - x(\sigma t) e^{-j u} \mathbf{E}_2 \right) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) + j \sigma e^{-j u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\mathbf{H}^{(2)}(u, t) \mathbf{E}_2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Замена (5.61) выполняется с целью асимптотического центрирования случайного процесса $i(t)$, так как $\mathbf{H}^{(2)}(u, t)$ является матричной характеристической функцией центрированного случайного процесса $i(t) - \frac{1}{\sigma} x(\sigma t)$, в котором функция $x(\tau)$ получена на первом этапе асимптотического анализа.

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ в системе (5.64) и выполнив замены

$$\tau = t \varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \quad (5.63)$$

систему (5.62) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \left(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \lambda \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1) \right) + \\
& \quad + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\
& \quad \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{E}) + j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{E} = \\
& = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left(\left[\lambda \mathbf{E}_1 - e^{-j\varepsilon w} x \mathbf{E}_2 \right] \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + e^{-j\varepsilon w} j\varepsilon \frac{\partial}{\partial w} (\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{E}_2) \right). \quad (5.64)
\end{aligned}$$

Решение $\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)$ будем искать в классе функций, для которых существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)$ и предел производных по w

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)}{\partial w} \quad \text{и по } \tau \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)}{\partial \tau}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 5.6 *Функция $\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau)$ имеет вид*

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau) = \Phi(w, \tau) \mathbf{R}(x), \quad (5.65)$$

где матрица $\mathbf{R}(x)$, зависящая от значений параметра x , определена в Теореме 5.5 своими компонентами $R(n_1, n_2, x)$, а скалярная функция $\Phi(w, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau). \quad (5.66)$$

Здесь функция $a(x)$ определяется равенством (5.53), а скалярная функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x) = a(x) + 2[\lambda + x] \mathbf{g}(x) \mathbf{E}_1 + 2x \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2, \quad (5.67)$$

где матрица $\mathbf{g}(x)$ с компонентами $g(n_1, n_2, x)$ при $n_1 + n_2 \leq N$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(x) (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) &= a(x) \mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(x) (x \mathbf{I}_1 - \lambda \mathbf{B}), \\
\mathbf{g}(x) \mathbf{E} &= 0. \quad (5.68)
\end{aligned}$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы (5.64) с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$j\varepsilon w a(x) \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + j\varepsilon w \lambda \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w \mathbf{I}_1)) + \\ + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2).$$

Решение этого уравнения запишем в виде разложения:

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{ \mathbf{R}(x) + j\varepsilon w \mathbf{f}(x) \} + O(\varepsilon^2), \quad (5.69)$$

где $\Phi(w, \tau)$ – некоторая скалярная функция, вид которой определим ниже. Принимая во внимание равенство (5.53), разделим последнее уравнение на $j\varepsilon$ и устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$a(x) \mathbf{R}(x) = \\ = \mathbf{f}(x) (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{R}(x) (\lambda \mathbf{B} - x \mathbf{I}_1) + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} \mathbf{R}(x) (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1).$$

Последнее равенство перепишем в виде неоднородного уравнения:

$$\mathbf{f}(x) (\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = \\ = a(x) \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(x) (\mathbf{B} - x \mathbf{I}_1) + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} \mathbf{R}(x) (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0). \quad (5.70)$$

Применяя принцип суперпозиции для неоднородных систем, решение $\mathbf{f}(x)$ этого уравнения запишем в виде суммы

$$\mathbf{f}(x) = C \mathbf{R}(x) + \mathbf{g}(x) - \varphi(x) \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)}, \quad (5.71)$$

которое подставим в (5.70), получим уравнения

$$\varphi(x) (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = \mathbf{R}(x) (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1), \quad (5.72)$$

$$\mathbf{g}(x) (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = a(x) \mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(x) (x \mathbf{I}_1 - \lambda \mathbf{B}). \quad (5.73)$$

Отметим, что уравнение (5.73), определяющее матрицу $\mathbf{g}(x)$, совпадает с первым уравнением (5.68), следовательно, утверждение (5.68) формулировки теоремы верно.

Теперь рассмотрим уравнение (5.51). Продифференцируем его по x , получим равенство:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} \{ \mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \} + \mathbf{R}(x)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0.$$

Учитывая последнее уравнение и уравнение (5.72) для $\boldsymbol{\varphi}(x)$, запишем важное равенство:

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x}, \quad (5.74)$$

В силу условия нормировки $\mathbf{R}(x)\mathbf{E} = 1$, для матричной функции $\boldsymbol{\varphi}(x)$ выполняется дополнительное условие $\boldsymbol{\varphi}(x)\mathbf{E} = 0$.

В силу (5.73) матрица $\mathbf{g}(x)$ является частным решением неоднородной системы, поэтому она удовлетворяет некоторому дополнительному условию, которое будем выбирать в виде $\mathbf{g}(x)\mathbf{E} = 0$, тогда решение $\mathbf{g}(x)$ системы (5.73), определяется однозначно системой (5.68).

Теперь рассмотрим второе скалярное уравнение системы (5.64), в которое подставим разложение (5.69) и перепишем с точностью до $O(\varepsilon^3)$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) \Phi(w, \tau) \{ 1 + j\varepsilon w \mathbf{f}(x)\mathbf{E} \} = \\ & = \left(j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) \times \\ & \times \left(\Phi(w, \tau) \{ \mathbf{R}(x) + j\varepsilon w \mathbf{f}(x) \} [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2 + j\varepsilon w x \mathbf{E}_2] + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2 \right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) \Phi(w, \tau) + (j\varepsilon w)^2 a(x) \Phi(w, \tau) \mathbf{f}(x)\mathbf{E} = \\ & = \Phi(w, \tau) \left\{ (j\varepsilon w)^2 \mathbf{f}(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] + (j\varepsilon w)^2 \mathbf{R}(x) x \mathbf{E}_2 + \right. \\ & \left. + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{R}(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] + (j\varepsilon w)^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w} \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2 \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Тогда, применяя равенство (5.53), получим:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + (j\varepsilon w)^2 a(x) \Phi(w, \tau) \mathbf{f}(x) \mathbf{E} = \\ & = \Phi(w, \tau) \left\{ (j\varepsilon w)^2 \mathbf{f}(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] + (j\varepsilon w)^2 \mathbf{R}(x) x \mathbf{E}_2 + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} a(x) + \right. \\ & \left. + (j\varepsilon w)^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w} \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2 \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Разделив последнее уравнение на ε^2 и устремив $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = \\ & = \Phi(w, \tau) \left\{ (jw)^2 \mathbf{f}(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] + (jw)^2 \mathbf{R}(x) x \mathbf{E}_2 + \frac{(jw)^2}{2} a(x) - \right. \\ & \left. - (jw)^2 a(x) \mathbf{f}(x) \mathbf{E} + (jw)^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w} \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2 \right\}, \end{aligned}$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} &= \frac{(jw)^2}{2} \left\{ 2\mathbf{f}(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] + 2\mathbf{R}(x) x \mathbf{E}_2 - 2a(x) \mathbf{f}(x) \mathbf{E} + a(x) \right\} - \\ & - w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2, \end{aligned}$$

в которое подставим (5.71)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} &= \frac{(jw)^2}{2} \left\{ 2\mathbf{g}(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] + 2\mathbf{R}(x) x \mathbf{E}_2 + a(x) \right\} + \\ & + w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} (\varphi(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] - \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Обозначив

$$b(x) = 2\mathbf{g}(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] + 2\mathbf{R}(x) x \mathbf{E}_2 + a(x), \quad (5.76)$$

уравнение (5.75) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} (\varphi(x) [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] - \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2) + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau). \quad (5.77)$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\varphi(x)[\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] - \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2.$$

Применяя (5.74) к последнему равенству, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} [\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2] - \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2. \quad (5.78)$$

Рассмотрим равенство (5.53). Продифференцируем $a(x)$ по x , и принимая во внимание, что матрица $\mathbf{R}(x)$ как решение системы (5.51), зависит от x , получим

$$a'(x) = \frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} \lambda \mathbf{E}_1 - x \frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} \mathbf{E}_2 - \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}(x)}{\partial x} (\lambda \mathbf{E}_1 - x \mathbf{E}_2) - \mathbf{R}(x) \mathbf{E}_2.$$

Сравнивая последнее равенство и равенство (5.78), уравнение (5.77) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau), \quad (5.79)$$

которое совпадает с (5.66). **Теорема доказана.**

Функция $b(x)$ имеет смысл коэффициента диффузии того диффузионного процесса, для которого коэффициентом переноса является функция $a(x)$, определяемая равенством (5.53).

Таким образом, определены функции $a(x)$ равенством (5.53) и $b(x)$ равенством (5.67). Их применение в методе асимптотически-диффузионного анализа предложенной системы доказывается аналогично тому, как это показано для многолинейной RQ-системы $M|N_2|N$ в леммах 5.1 и 5.2 и теореме 5.3.

5.2.2 Построение дискретного распределения, аппроксимирующего стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите

В работе ставится задача нахождения достаточно точных аппроксимаций дискретного распределения $P(n_1, n_2)$ числа n_1 и n_2 приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания и распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой N -линейной RQ-системы.

Двумерное распределение вероятностей $P(n_1, n_2)$ числа приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания можно аппроксимировать элементами

$R(n_1, n_2, x)$ треугольной матрицы $R(x)$, выбрав значение x функции $x(\tau)$ определяемой дифференциальным уравнением $x'(\tau) = a(x)$. Для стационарных вероятностей $P(n_1, n_2)$ в аппроксимации $R(n_1, n_2, x)$ значение x будем выбирать $x = \kappa$, где κ – положительный корень уравнения $a(x) = 0$.

Для построения аппроксимации дискретного распределения $P(i)$ необходимо вернуться к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$. Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P(i)$ дискретного случайного процесса $i(\tau)$ осуществим, используя формулу (5.38), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде (5.41). Принимая во внимание условие нормировки, запишем дискретное распределение вероятностей в виде (5.42)

$$P_1(i) = G(i) / \sum_{i=0}^{\infty} G(i).$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $P_1(i)$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P(i(t) = i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы.

5.2.3 Точность предлагаемых аппроксимаций для RQ-системы M|M, M|N со специальным обслуживанием

Для исследования точности предлагаемых аппроксимаций была разработана имитационная модель этой RQ-системы, позволившая найти оценку распределения вероятностей числа n приборов, занятых в RQ-системе и числа заявок $P_{im}(i)$ на орбите.

Для численных примеров были выбраны следующие параметры системы: $N = 5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$. Интенсивность λ входящего потока будем определять из условия существования стационарного режима

$$\lambda = \rho N \mu_2 \frac{(N-1)\mu_2 + \mu_1}{N\mu_2 + \mu_1}. \quad (5.80)$$

определив параметр загрузки системы $\rho \in [0; 1)$.

Таблица 5.3 – Расстояния Колмогорова Δ для аппроксимации $P_1(i)$ числа заявок на орбите

	$\sigma = 2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\rho = 0.6$	0.058	0.096	0.091	0.040	0.014
$\rho = 0.7$	0.084	0.081	0.047	0.012	0.007
$\rho = 0.8$	0.065	0.040	0.015	0.004	0.003
$\rho = 0.9$	0.025	0.010	0.002	0.001	0.001

Из табличных значений следует, что точность предлагаемой в (5.42) аппроксимации возрастает с уменьшением величины σ . Здесь же расстояние Колмогорова $\Delta \leq 0.05$ для всех значений сетевых параметров σ и ρ правого нижнего угла таблицы. При $\rho = 0.9$ это неравенство выполняется при всех значениях $\sigma \leq 1$, что говорит о достаточно широкой области применимости предлагаемой в (5.42) аппроксимации $P_1(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы. Полу жирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

5.3 Резюме

В данном разделе был предложен новый метод исследования многолинейных систем с повторными вызовами двух типов: с гиперэкспоненциальным временем обслуживания и специальным обслуживанием заявок, – асимптотически диффузионным методом в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Для системы со специальным обслуживанием получено условие существования стационарного режима.

В результате применения метода асимптотически диффузионного анализа для каждой модели получен диффузионный процесс, плотность распределения вероятности которого используется в качестве аппроксимации для распределения вероятностей числа заявок на орбите и числа занятых приборов в системе.

Проводя численные эксперименты в сравнении с результатами имитационного моделирования получены оценки точности предложенных аппроксимаций. В качестве оценки точности используется расстояние Колмогорова Δ , применяя которое определяем область применимости полученных аппроксимаций в виде $\Delta \leq 0,05$. Показано, что диапазон областей достаточно широк.

Результаты данной главы могут быть обобщены на более общие случаи. Применение метода асимптотически диффузионного анализа возможно при исследовании многолинейных систем с повторными вызовами различной конфигурации, в частности, с вызываемыми заявками, нетерпеливыми заявками или с произвольным распределением времени обслуживания.

Результаты, описанные в данной главе, были представлены в работах [202, 207]. Предлагаемые в данной главе методы исследования использовались в работах [193, 205].

Глава 6 Численный анализ области применимости асимптотических результатов в допредельной ситуации и комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов

В Главах 1–5 диссертации представлены теоретические исследования потоков со случайным объемом требований и систем массового обслуживания с повторными вызовами различной конфигурации. Результатами этих исследований являются формулы для получения допредельных распределений и формулы для получения аппроксимаций.

Компьютерное моделирование применяется с использованием численных методов как для расчета параметров распределений по полученным формулам, так и для анализа области применимости полученных в работе аппроксимаций.

Одним из основных результатов в диссертации является получение достаточно простых формул для расчета аппроксимаций законов распределения вероятностей. Качество предельных распределений подтверждается путем их сравнения с допредельными распределениями, реализация которых возможна не для всех предложенных моделей в работе или только для отдельных частных случаев и требует, как правило, значительных затрат машинного времени, что не всегда приводит к определенным результатам.

В том случае, когда допредельное распределение получить не удастся, анализ области применимости предельных результатов выполняется на основе сравнения с результатами имитационного моделирования соответствующих систем.

Для сравнения полученных в работе законов распределения вероятностей мы используем расстояние Колмогорова, так как данная метрика позволяет количественно продемонстрировать близость соответствующих распределений. В качестве критерия для определения погрешности полученных предельных результатов также используется расстояние Колмогорова. Если расстояние Колмогорова при-

нимает значение не более 0.05, то будем считать, что аппроксимация вполне приемлема, если меньше или равно 0.03, то аппроксимацию будем называть достаточно точной, а если меньше или равно 0.01, то – сверхточной.

Отметим тот факт, что аппроксимации, на основе которых строятся дискретные законы распределения, в представленных результатах работы являются функциями распределения непрерывных случайных величин. Для получения распределения дискретной случайной величины из непрерывного закона выполняется его дискретизация и нормирование.

В данной главе представлено описание разработанного комплекса программ, реализующего численный анализ вероятностных характеристик систем массового обслуживания с повторными вызовами, который включает: программы, позволяющие находить характеристики исследуемых потоков и систем, а именно математическое ожидание и дисперсию; программы, реализующие допредельное распределение, гауссовскую аппроксимацию объема информации, поступившей в исследуемых потоках при достаточно больших t , гауссовскую и диффузионную аппроксимации числа заявок на орбите в исследуемых системах с повторными вызовами различной конфигурации, а также распределение (3.77) в предельном условии согласованно растущего времени обслуживания вызываемых заявок.

Отметим, что численный анализ результатов проводился для достаточно большого числа примеров, которые нет возможности представлять в данной работе в полном объеме. Они широко представлены в публикациях автора. В данной главе для каждого типа потока и системы приводится по одному демонстрационному примеру.

6.1 Численная реализация формул для получения аппроксимаций и допредельных распределений вероятностей объема информации, поступившей в потоках со случайным объемом требований за время t

Программное обеспечение для моделирования всех указанных моделей реализовано в системе MathCAD. В качестве примера приводится численная реализация формул для анализа объема информации, поступившей за время t в рассматриваемых потоках со случайным объемом требований.

6.1.1 Поток восстановления

В Главе 1 для потока восстановления определена допредельная характеристическая функция объема $S(t)$ информации, поступившей в заявках потока за время t

$$H(u, t) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\tau t}}{j\tau} A_1^*(\tau) \frac{1 - B^*(u)}{1 - B^*(u)A^*(\tau)} d\tau. \quad (6.1)$$

Здесь $A^*(\tau) = \int_0^{\infty} e^{j\tau t} dA(t)$, $B^*(u) = \int_0^{\infty} e^{ju t} dB(x)$, $A_1^*(\tau) = \int_0^{\infty} e^{j\tau t} dA_1(t)$ – характеристические функции от функций $A(x)$, $B(x)$ и $A_1(x)$ соответственно. Равенством

$$H(u, t) = 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (B^*(u))^m A_1(t) [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)], \quad (6.2)$$

эту характеристическую функцию можно представить через кратные свертки функций распределений $A(x)$ и $B(x)$. Здесь $A^{(m)}(t)$ – m -кратная свертка функций распределения $A(t)$, при этом 0-кратная свертка $A^{(0)}(t) \equiv 1$. Данная функция с помощью обратного преобразования Фурье определяет распределение вероятностей объема $S(t)$.

$$F(x, t) = 1 - A_1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_1(t) [A^{(m-1)}(t) - A^{(m)}(t)] B^{(m)}(x), \quad (6.3)$$

записано явное выражение функции распределения объема $S(t)$. Здесь $B^{(m)}(x)$ – m -кратная свертка функций распределения $B(x)$.

Нахождение значений функции распределения $F(x, t)$ по формуле (6.3) требует затрат машинного времени, которое не всегда приводит к определенным результатам. В первой главе предлагается достаточно простая гауссовская аппроксимация с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$ из Таблицы 1.1 в Главе 1.

Для получения из гауссовского распределения закона распределения дискретной случайной величины выполним его дискретизацию и нормирование по формуле

$$F_{app}(x, t) = \frac{F_N(x, t) - F_N(0, t)}{1 - F_N(0, t)}, \quad (6.4)$$

где $F_N(s, t)$ – гауссовская функция распределения с параметрами $a = \kappa_1 t$ и $\sigma = \sqrt{\kappa_2 t}$.

Точность полученной аппроксимации будем определять с помощью расстояния Колмогорова. Для вычисления воспользуемся формулой

$$\Delta(t) = \max_{0 \leq x < \infty} |F(x, t) - F_{app}(x, t)|. \quad (6.5)$$

Если расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ принимает значение не более 0.05, то будем говорить, что аппроксимация приемлема, если $\Delta(t) \leq 0.03$, то аппроксимацию будем называть точной, а если $\Delta(t) \leq 0.01$, то назовем ее сверхточной.

В качестве примера рассмотрим поток восстановления, для которого будем полагать $A_1(x) \equiv A(x)$, а функции распределения $A(x)$ и $B(x)$ будем выбирать из класса гамма-распределений. Выбор этих функций из класса гамма-распределений существенно облегчает нахождение значений m -кратных сверток, так как m -кратная свертка гамма-распределения также является гамма-распределением с тем же параметром масштаба и параметром формы в m раз больше исходного значения параметра гамма распределения.

Положим для $A(x)$ параметр формы $\alpha_1 = 0.5$, параметр масштаба $\beta_1 = \alpha_1$, а для функции $B(x)$ $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = \alpha_2$. Для такого потока $\kappa_1 = 1$. В Таблице 6.1 приведены значения расстояний $\Delta(t)$ при указанных значениях времени t .

Таблица 6.1 – Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ между допредельным и асимптотическим распределениями для потока восстановления при различных значениях t

	$t = 7$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 200$
$\Delta(t)$	0.077	0.053	0.030	0.018	0.013	0.009

Значения расстояния $\Delta(t)$, приведенные в этой таблице говорят о достаточно высокой точности предложенной гауссовской аппроксимации. С увеличением значений времени t точность гауссовской аппроксимации естественно повышается в силу предельного условия. При $t \leq 10$ рекомендуется пользоваться допредельными формулами для нахождения функции распределения объема информации, поступившей в заявках потока восстановления за время t в виде (6.3).

6.1.2 ММРР-поток

Для нахождения допредельной характеристической функции

$$\mathbf{H}(u, t)\mathbf{e} = M e^{juS(t)} = \mathbf{r} \exp \left\{ \left[\mathbf{Q} + (B^*(u) - 1)\mathbf{\Lambda} \right] t \right\} \mathbf{e} \quad (6.6)$$

суммарного объема информации, поступающего за время t в ММРР-потоке обозначим матрицу $\mathbf{A}(u) = \mathbf{Q} + (B^*(u) - 1)\mathbf{\Lambda}$. Так же обозначим вектор ее собственных чисел $\gamma(u)$ и матрицу собственных векторов $x(u)$. Значение матричной экспоненты при простых собственных числах определим равенством

$$e^{A(u)t} = x(u) \text{diag} \left(e^{\gamma(u)t} \right) x(u)^{-1}. \quad (6.7)$$

Применяя равенство (6.7), запишем значение скалярной характеристической функции

$$\mathbf{H}(u, t)\mathbf{e} = \mathbf{r} e^{A(u)t} \mathbf{e}.$$

Обратное преобразование Фурье от данной характеристической функции позволяет получить допредельную функцию распределения объема информации, поступившей в заявках потока восстановления за время t

$$F(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-jus}}{ju} \mathbf{H}(u, t)\mathbf{e} du. \quad (6.8)$$

В Главе 1 получено достаточно простое выражение для распределения вероятностей значений объема $S(t)$ информации, поступившей за время t в заявках ММРР-потока. Найдя значения κ_1 и κ_2 по формулам (1.43) и (1.51), предварительно решив систему (1.52) запишем гауссовскую функцию распределения $F_{ap}(s, t)$ с параметрами $\kappa_1 t$ и $\kappa_2 t$ в виде (6.4).

Для предложенной модели ММРР-потока положим $\alpha = 2$, $\beta = \alpha$,

$$B^*(u) = \left(\frac{\beta}{\beta - ju} \right)^\alpha$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.462 & 0 & 0 \\ 0 & 0.925 & 0 \\ 0 & 0 & 1.387 \end{bmatrix}.$$

Решая систему $\mathbf{rQ} = 0$, $\mathbf{re} = 1$, получим

$$\mathbf{r} = \{0.197, 0.444, 0.359\},$$

интенсивность $b_1 \mathbf{r} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = 1$. Для рассматриваемых исходных данных \mathbf{Q} , $\mathbf{\Lambda}$ и $B^*(u)$ значения κ_1 и κ_2 составляют

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = 1.679.$$

Точность аппроксимации гауссовским распределением $F_{app}(s, t)$ допредельного распределения $F(s, t)$, которое для ММРР-потока получено в виде (6.8) так же будем оценивать $\Delta(t)$ между этими распределениями. В Таблице 6.2 приведены значения расстояния Колмогорова $\Delta(t)$ для указанных значений t между гауссовской аппроксимацией $F_{app}(s, t)$ и допредельным распределением $F(s, t)$, которое для ММРР-потока получено в виде (6.8).

Таблица 6.2 – Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ между допредельным и асимптотическим распределениями для ММРР-потока при различных значениях t

	$t = 7$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 200$
$\Delta(t)$	0.053	0.041	0.026	0.016	0.012	0.008

Из приведенных табличных данных получим, что при $t \geq 20$ предлагаемая гауссовская аппроксимация является точной. Сравнение графиков асимптотической P_{as} и допредельной P плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время t представлено

на рисунках 6.1 – 6.6. Видно, что что уже при $t = 20$ эти два распределения становятся близкими между собой.

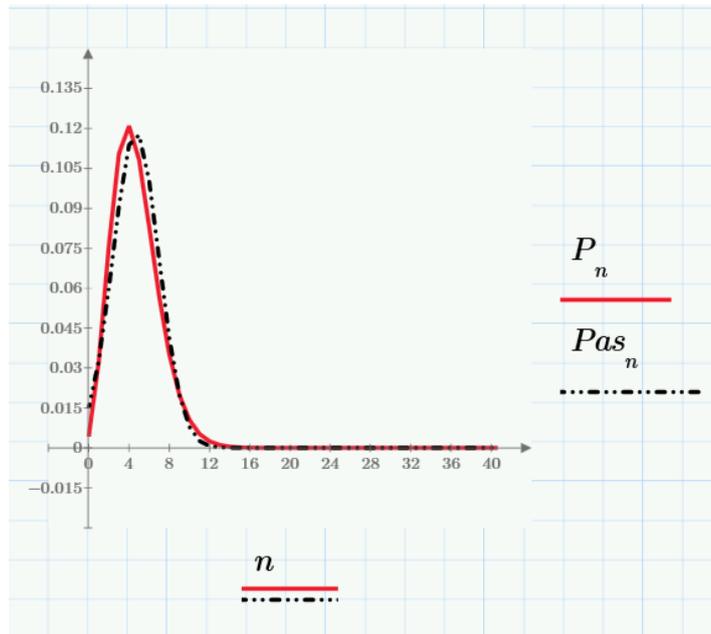


Рисунок 6.1 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 7$

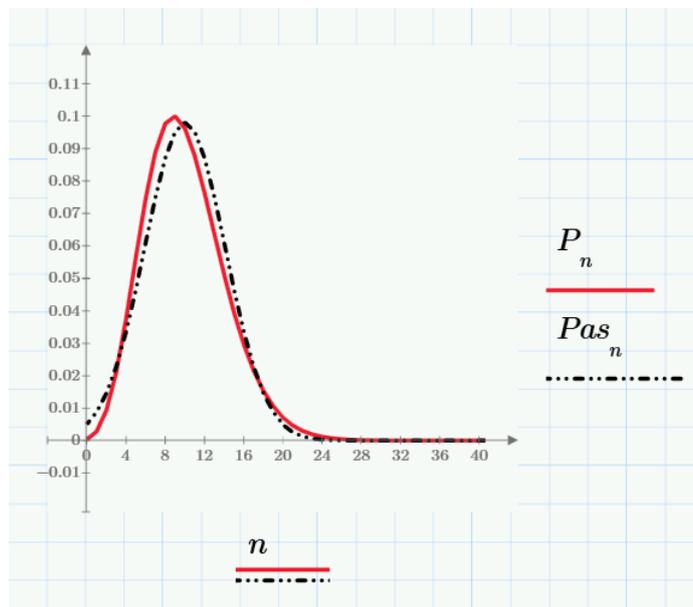


Рисунок 6.2 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 10$

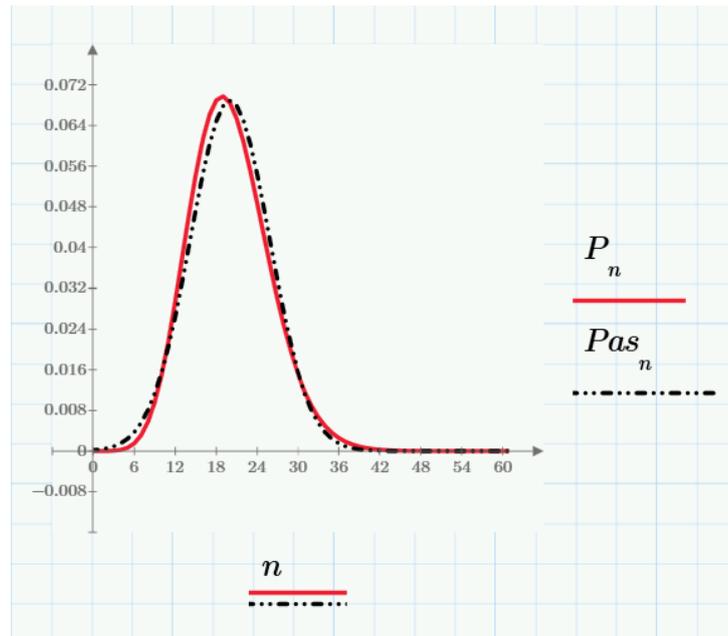


Рисунок 6.3 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 20$

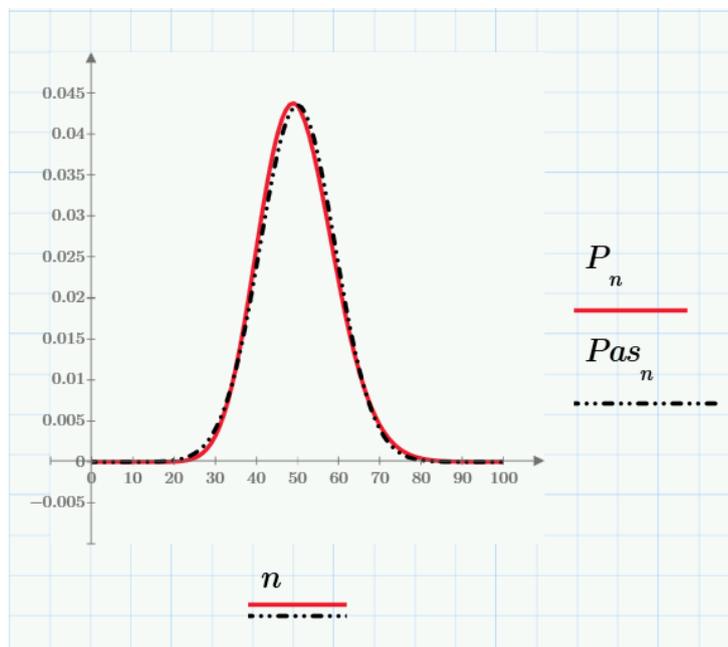


Рисунок 6.4 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 50$

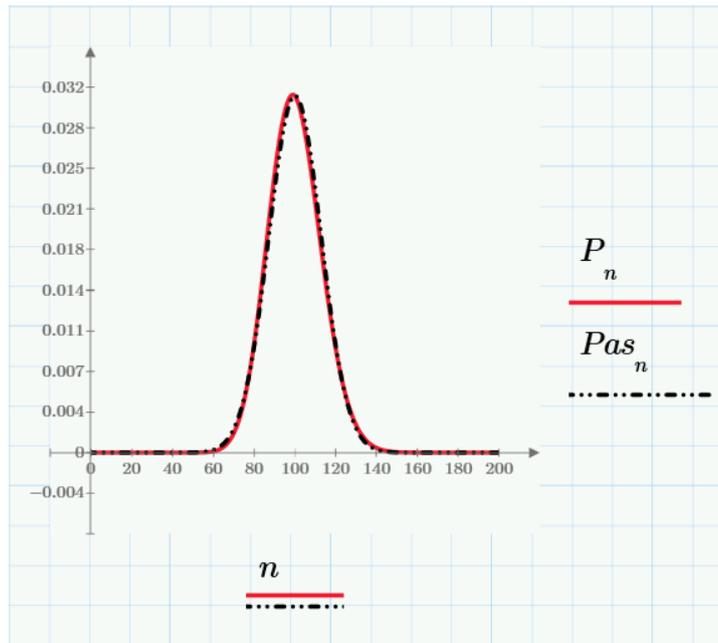


Рисунок 6.5 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 100$

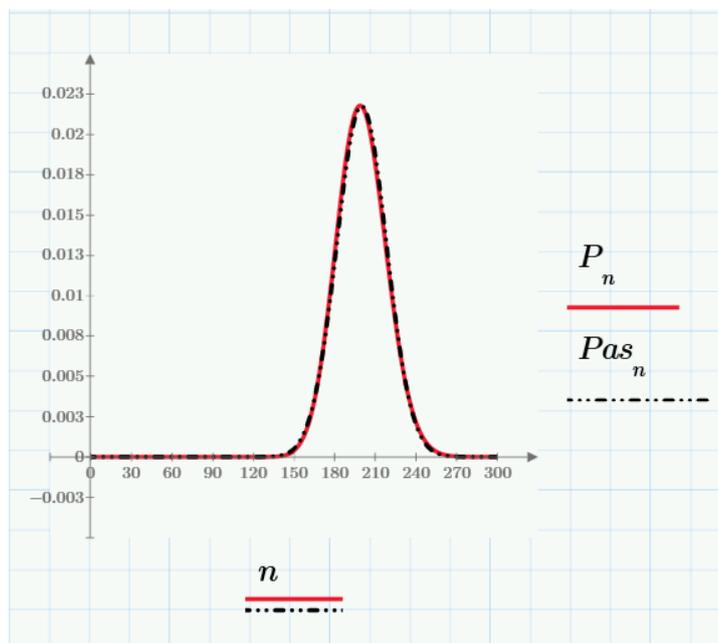


Рисунок 6.6 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках ММРР-потока за время $t = 200$

6.1.3 Полумарковский поток

Для полумарковского потока полумарковскую матрицу $\mathbf{A}(x)$ определим следующим образом:

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{P} \circ \mathbf{G}(x),$$

где « \circ » – произведение Адамара. Матрица \mathbf{P} – матрица переходов вложенной цепи Маркова $\xi(n)$ и $\mathbf{G}(x)$ – матрица условных функций распределений процесса $\tau(n)$.

Матрица \mathbf{P} имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы $\mathbf{G}(x)$ являются функции гамма-распределения с параметрами формы α и масштаба β

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пусть количество информации в одном пакете также имеет гамма распределение с параметрами формы и масштаба $\alpha = 2$, $\beta = 2$. Для рассматриваемых исходных данных значения κ_1 и κ_2 составляют $\kappa_1 = 0.411$, $\kappa_2 = 0.336$. На рисунках 6.7 – 6.12 показана плотность распределения объема информации, поступившей в полумарковском потоке, полученная по формуле (1.89) (сплошная линия) по сравнению с асимптотическим результатом (пунктирная линия) для $t = 5$, $t = 10$, $t = 20$, $t = 50$, $t = 100$, $t = 200$. В Таблице 6.3 представлены расстояния Колмогорова

$$\Delta(t) = \max_{0 \leq x < \infty} |F(x, t) - F_N(x, t)|$$

между допредельным распределением, полученным по интегральной формуле (1.80) и асимптотической функцией распределения с параметрами κ_1 и κ_2 для полумарковского потока.

Таблица 6.3 – Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ между допредельным и асимптотическим распределениями для полумарковского потока при различных значениях t

	$t = 5$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 200$
$\Delta(t)$	0.095	0.052	0.033	0.020	0.014	0.010

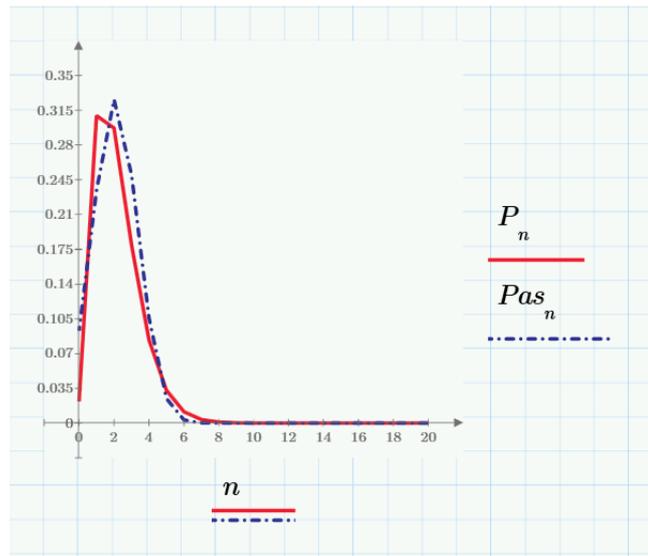


Рисунок 6.7 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 5$

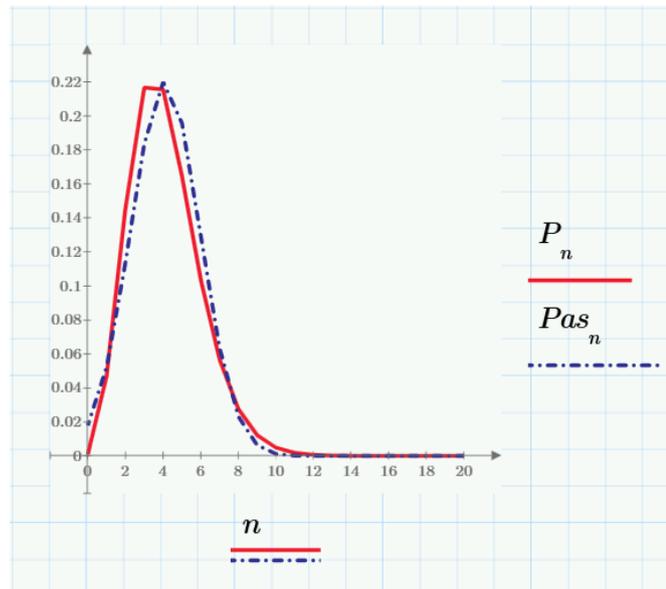


Рисунок 6.8 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 10$

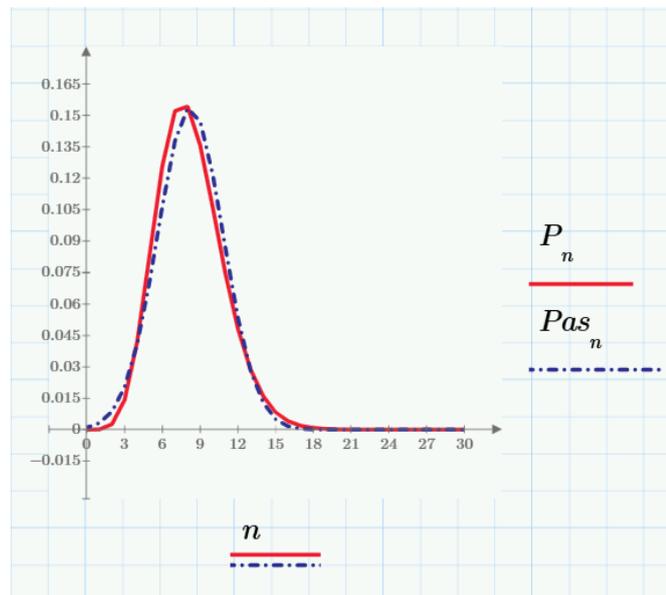


Рисунок 6.9 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 20$

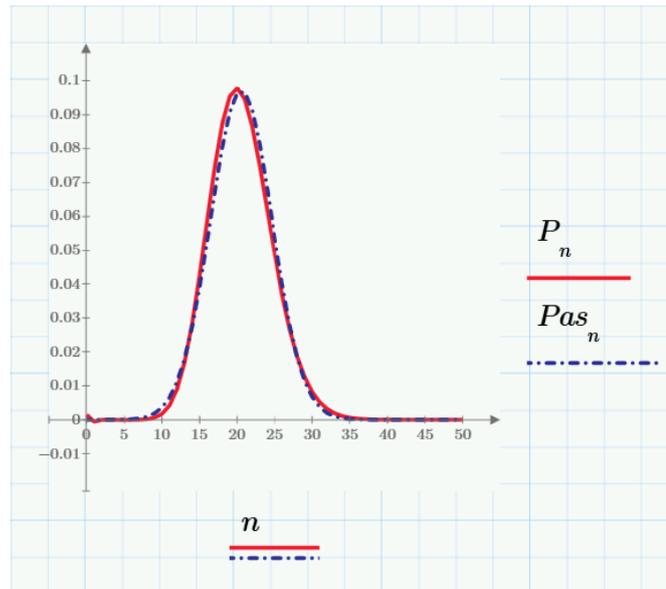


Рисунок 6.10 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 50$

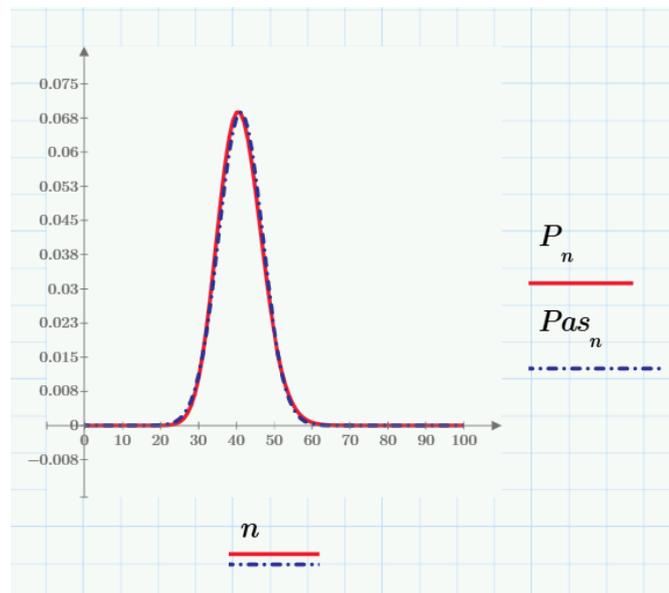


Рисунок 6.11 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 100$

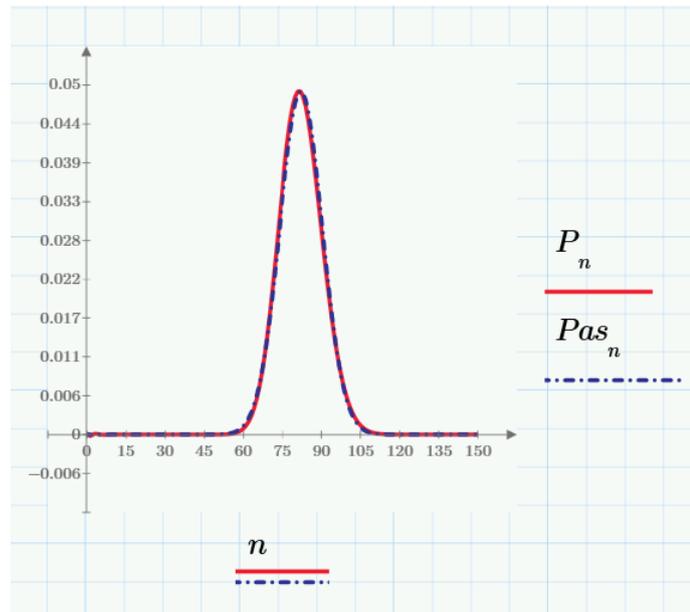


Рисунок 6.12 – Сравнение графиков асимптотической и допредельной плотностей распределения вероятностей суммарного объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время $t = 200$

Можно сделать вывод о том, что точность аппроксимации повышается с увеличением времени t . Численная реализация формул (1.89) и (1.80) дает наиболее точные результаты, ограниченные лишь возможностями вычислительной техники. При $\kappa_1 t < 5$ рекомендуется использовать допредельные формулы в виде интеграла для нахождения функции распределения объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока за время t . Аппроксимация является вполне приемлемой при $5 \leq \kappa_1 t \leq 10$ и точной при $\kappa_1 t \geq 510$. Предлагаемая аппроксимация является сверхточной при $\kappa_1 t > 60$. Для достаточно больших значений t ($\kappa_1 t > 200$) реализация численных алгоритмов нахождения распределения вероятностей объема информации, поступившей в заявках полумарковского потока становится практически невозможным и в этом случае целесообразно применение асимптотических результатов.

6.2 Численная реализация формул для получения распределений вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах различной конфигурации

Данный раздел посвящен построению аппроксимаций распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах на основе полученных асимптотических характеристик систем, а также определению границ применимости аппроксимаций. Сравнивая асимптотическое распределение с результатами имитационного моделирования при различных значениях параметра, который фигурирует в предельном условии, мы можем определить при каких значениях этого параметра асимптотическое распределение вероятностей достаточно близко к искомому распределению вероятностей. Для сравнения двух распределений вероятностей предлагается использовать расстояние Колмогорова вида

$$\Delta = \max_{0 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P_{im}(i) - P(i)) \right| \quad (6.9)$$

где $P_{im}(i)$ – распределение вероятностей числа заявок на орбите, полученное с помощью имитационного моделирования, а $P(i)$ – аппроксимация того же распределения вероятностей, построенная на основе полученных асимптотических характеристик исследуемой системы.

Программное обеспечение для моделирования всех указанных моделей реализовано в системе MathCAD.

6.2.1 RQ-система MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками

Ставится задача определения точности полученных в главах 3 и 4 аппроксимаций дискретного распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками в различных асимптотических условиях.

Опишем алгоритмы построения аппроксимаций в различных асимптотических условиях.

Алгоритм построения гауссовской аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$).

1. Задание значений параметров системы $N, \mu_1, \mu_n, \alpha_n, n = \overline{2, N}$.
2. Задание значений элементов матриц \mathbf{Q}, Λ_1 , величину загрузки системы $\rho \in (0, 1)$.
3. Нахождение стационарного распределения вероятностей \mathbf{r} управляющего MMPP-поток процессом $m(t)$, которое определяется системой уравнений: $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.
4. Используя значения введенных параметров и полученное распределение \mathbf{r} , определяем матрицу условных интенсивностей входящего MMPP-потока $\Lambda = \frac{\rho\mu_1\Lambda_1}{\mathbf{r}\Lambda_1\mathbf{e}}$.
5. Нахождение параметра κ_1 как решение уравнения (3.4).
6. Нахождение векторов $\mathbf{g}_k, k = \overline{0, N}$ как решение матричной системы уравнений (3.22).
7. Нахождение векторов $\boldsymbol{\phi}_k, k = \overline{0, N}$ как решение матричной системы уравнений (3.23).
8. Нахождение параметра κ_2 по формуле (3.21).
9. Построение дискретной аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите по формуле (3.89)

$$P_{app}(i) = \frac{F(i+0.5) - F(i-0.5)}{1 - F(-0.5)}, \quad (6.10)$$

здесь $F(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами κ_1/σ и $\sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}$. Эту аппроксимацию будем называть **гауссовской**.

Алгоритм построения гауссовской аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызывания заявок ($\alpha \rightarrow \infty$).

1. Задание значений параметров системы $N, \sigma, \mu_1, \mu_n, \eta_n, n = \overline{2, N}$.
2. Задание значений элементов матриц \mathbf{Q}, Λ_1 , величину загрузки системы $\rho \in (0, 1)$.
3. Нахождение стационарного распределения вероятностей \mathbf{r} управляющего ММРР-поток процессом $m(t)$, которое определяется системой уравнений: $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.
4. Используя значения введенных параметров и полученное распределение \mathbf{r} , определяем матрицу условных интенсивностей входящего ММРР-потока $\Lambda = \frac{\rho\mu_1\Lambda_1}{\mathbf{r}\Lambda_1\mathbf{e}}$.
5. Нахождение параметра κ_1 как решение уравнения (3.41).
6. Нахождение векторов $\mathbf{g}_k, k = \overline{0, N}$ как решение матричной системы уравнений (3.59).
7. Нахождение векторов $\mathbf{\phi}_k, k = \overline{0, N}$ как решение матричной системы уравнений (3.60).
8. Нахождение параметра κ_2 по формуле (3.58).
9. Построение дискретной аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите по формуле (3.89)

$$P_{app}(i) = \frac{F(i+0.5) - F(i-0.5)}{1 - F(-0.5)},$$

здесь $F(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами $\kappa_1\alpha$ и $\sqrt{\alpha\kappa_2}$.

Алгоритм построения аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе в предельном условии в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок ($\mu_2 \rightarrow 0$)

1. Задание значений параметров системы $N, \sigma, \mu_1, \eta_n, \alpha_n, n = \overline{2, N}$.
2. Задание значений элементов матриц \mathbf{Q}, Λ_1 , величину загрузки системы $\rho \in (0, 1)$.

3. Нахождение стационарного распределения вероятностей \mathbf{r} управляющего ММРР-поток процессом $m(t)$, которое определяется системой уравнений: $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.

4. Используя значения введенных параметров и полученное распределение \mathbf{r} , определяем матрицу условных интенсивностей входящего ММРР-потока $\Lambda = \frac{\rho\mu_1\Lambda_1}{\mathbf{r}\Lambda_1\mathbf{e}}$.

5. Нахождение параметра ν_1 по формуле (3.78).

6. Нахождение характеристической функции $H(u)$ числа заявок на орбите в исследуемой RQ-системе по формуле (3.77).

7. Построение аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите по формуле

$$P_{app}(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju_i} H(u) du, \quad (6.11)$$

которая существенно отличается от гауссовской аппроксимации.

Алгоритм построения диффузионной аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе.

1. Задание значений параметров системы $N, \sigma, \mu_1, \mu_n, \alpha_n, n = \overline{2, N}$.

2. Задание значений элементов матриц \mathbf{Q}, Λ_1 , величину загрузки системы $\rho \in (0, 1)$.

3. Нахождение стационарного распределения вероятностей \mathbf{r} управляющего ММРР-поток процессом $m(t)$, которое определяется системой уравнений: $\mathbf{r}\mathbf{Q} = 0, \mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.

4. Используя значения введенных параметров и полученное распределение \mathbf{r} , определяем матрицу условных интенсивностей входящего ММРР-потока $\Lambda = \frac{\rho\mu_1\Lambda_1}{\mathbf{r}\Lambda_1\mathbf{e}}$.

5. Нахождение векторов-функций $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x)$ вероятностей состояний прибора и состояний цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток, как решения системы (4.3) для каждого x .

6. Определение коэффициента переноса $a(x)$ в виде (4.10).

7. Нахождение векторов-функций $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k(x)$ как решения системы (4.18) для каждого x .

8. Определение коэффициента диффузии $b(x)$ в виде (4.17).

9. Определение неотрицательной функции $G(i)$ дискретного аргумента i в виде

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}.$$

10. Построение аппроксимации $P_{dif}(i)$ распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для RQ-систем с использованием метода асимптотически-диффузионного анализа по формуле (4.33)

$$P_{dif}(i) = G(i) / \sum_{i=0}^{\infty} G(i).$$

Данную аппроксимацию будем называть **диффузионной**.

Точность аппроксимации $P_{dif}(i)$ определяется с помощью расстояния Колмогорова Δ_1

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P_{im}(i) - P_{dif}(i)) \right|, \quad (6.12)$$

которое показывает разницу между распределениями вероятностей $P_{im}(i)$ и $P_{dif}(i)$, где $P_{im}(i)$ получено с помощью имитационного моделирования, $P_{dif}(i)$ получено в виде (4.33), в котором коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются формулами (4.10) и (4.17) соответственно.

Для сравнения с аппроксимациями (3.89) и (6.10) или (6.11), полученными с помощью метода асимптотического анализа в различных предельных условиях зададим расстояние Колмогорова Δ_2 в виде

$$\Delta_2 = \max_{0 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P_{im}(i) - P_{app}(i)) \right|. \quad (6.13)$$

Реализуя алгоритм построения гауссовской аппроксимации числа заявок на орбите и алгоритм построения диффузионной аппроксимации в рассматриваемой RQ-системе ММРР|М|1 с разнотипными вызываемыми заявками в условии большой задержки заявок на орбите, зададим $N = 4$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & -1.5 & 1 \\ 0.8 & 1.2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Определим матрицу Λ в виде

$$\Lambda = \frac{\rho \mu_1 \Lambda_1}{\mathbf{r} \Lambda_1 \mathbf{e}}, \quad (6.15)$$

ρ – параметр загрузки системы, значение которого определяет значение интенсивности входящего потока. Таким образом, варьируя параметр ρ загрузки системы, мы можем задать такую матрицу Λ , элементы которой будут удовлетворять условию существования стационарного режима в системе. Вектор \mathbf{r} является решением системы уравнений $\mathbf{rQ} = 0$, $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$.

Таблица 6.4 – Расстояние Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$
Δ_2					
$\rho = 0.5$	0.06	0.029	0.022	0.019	0.016
	0.189	0.135	0.116	0.075	0.049
$\rho = 0.7$	0.025	0.022	0.021	0.018	0.013
	0.259	0.201	0.167	0.099	0.079
$\rho = 0.9$	0.016	0.016	0.013	0.011	0.006
	0.344	0.256	0.222	0.163	0.101

Из данных, представленных в таблице 6.4, можно сделать вывод, что точность обеих аппроксимаций растет с уменьшением параметра σ . Расстояние Колмогорова для диффузионной аппроксимации уменьшается с ростом загрузки системы ρ , тогда как для гауссовской аппроксимации оно увеличивается.

Полужирным в таблице 6.4 выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

Сравнивая точность диффузионной аппроксимации с точностью гауссовской аппроксимации в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$, можем сделать вывод, что точность диффузионной аппроксимации превышает точность гауссовской аппроксимации

на порядок. При этом диффузионная аппроксимация имеет высокую точность для всех указанных в таблице значений параметров σ и ρ .

Сравнение графиков асимптотической $P_{app}(i)$, диффузионной $P_{dif}(i)$ и допредельной $P(i)$ плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите представлено на рисунках 6.13 – 6.16.

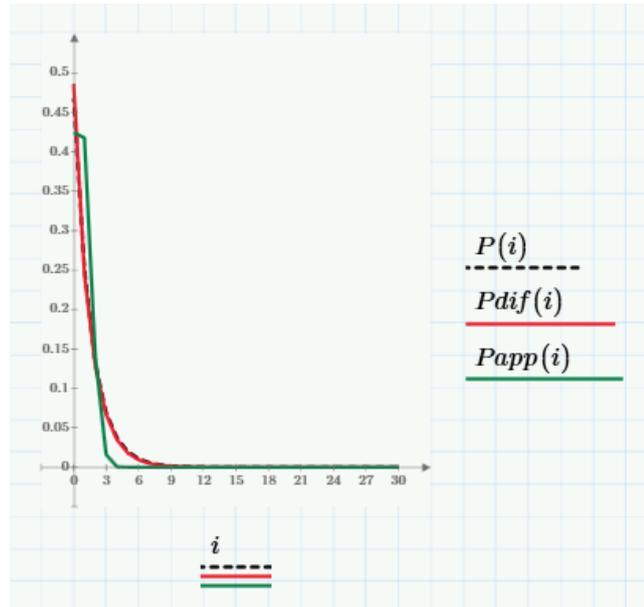


Рисунок 6.13 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 5$, $\rho = 0.5$

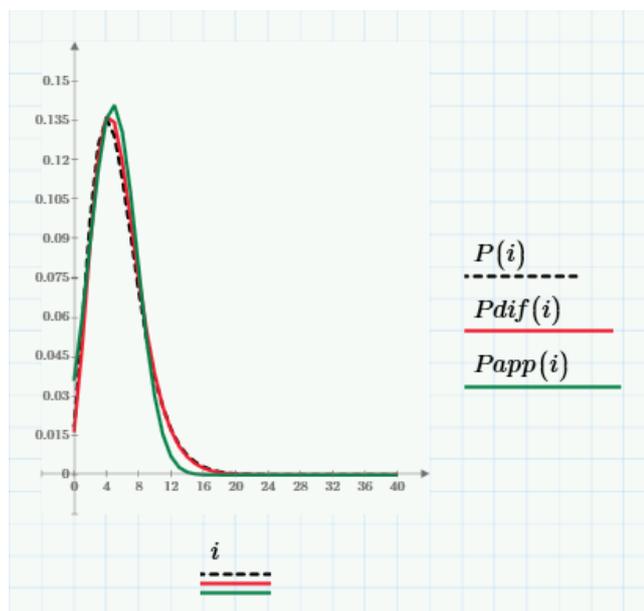


Рисунок 6.14 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 0.5$, $\rho = 0.5$

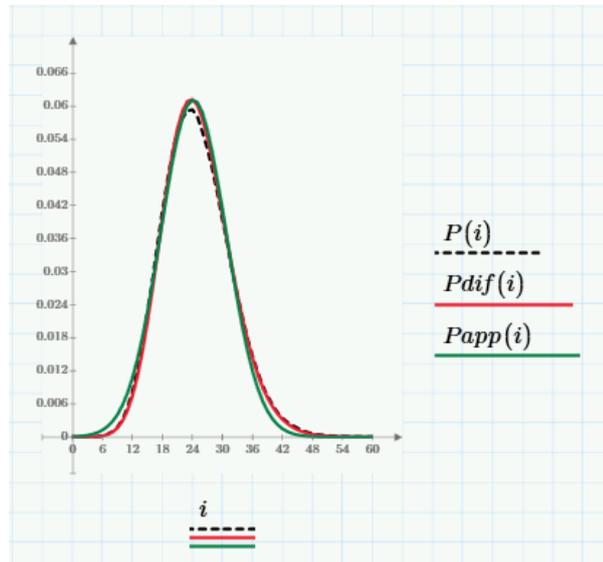


Рисунок 6.15 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 0.1$, $\rho = 0.5$

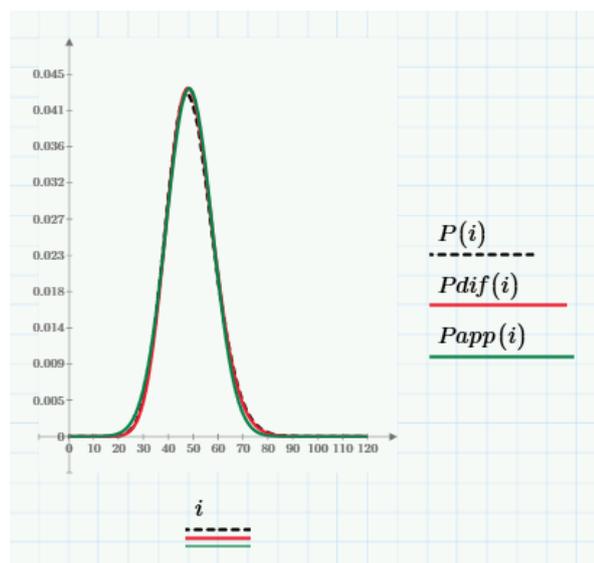


Рисунок 6.16 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 0.05$, $\rho = 0.5$

Реализуя алгоритм построения гауссовской аппроксимации числа заявок на орбите в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызывания заявок ($\alpha \rightarrow \infty$) и алгоритм построения диффузионной аппроксимации в рассматриваемой RQ-системе $MPP|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками, зададим $N = 4$, $\rho = 0.5$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, матрицу \mathbf{Q} в виде (6.14). Параметры α_n , $n = \overline{2, N}$ представим в виде $\alpha\eta_n$, $n = \overline{2, N}$ для удобства сравнения. Положим $\eta_2 = 1$, $\eta_3 = 2$, $\eta_4 = 3$.

Таблица 6.5 – Расстояние Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$
Δ_2					
$\alpha = 3$	0.036	0.027	0.021	0.013	0.006
	0.145	0.118	0.105	0.091	0.106
$\alpha = 5$	0.035	0.025	0.018	0.011	0.003
	0.114	0.097	0.082	0.073	0.088
$\alpha = 10$	0.033	0.023	0.017	0.010	0.002
	0.095	0.070	0.065	0.059	0.066

Из данных представленных в таблице 6.5 можем заключить, что точность диффузионной аппроксимации превышает точность гауссовской аппроксимации на порядок. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации точной и сверхточной.

Сравнение графиков асимптотической $P_{app}(i)$, диффузионной $P_{dif}(i)$ и допредельной $P(i)$ плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите представлено на рисунках 6.17 – 6.20.

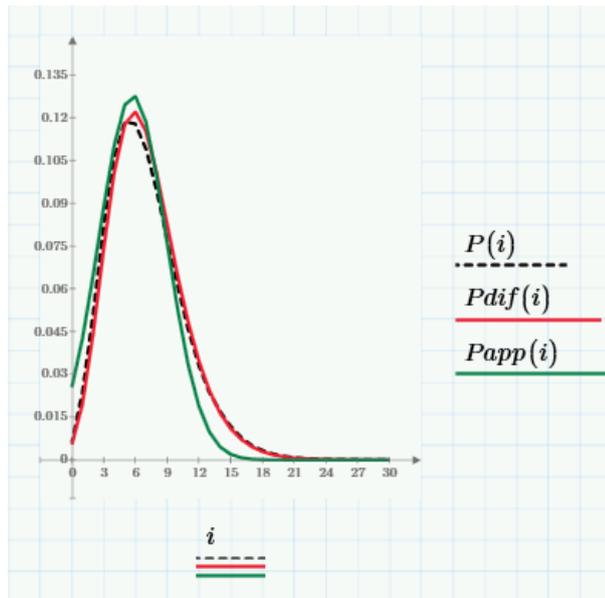


Рисунок 6.17 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\alpha = 3$, $\sigma = 1$

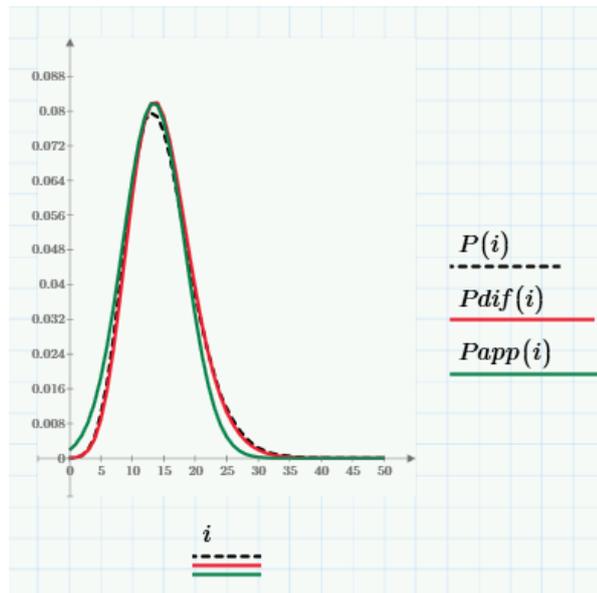


Рисунок 6.18 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\alpha = 7$, $\sigma = 1$

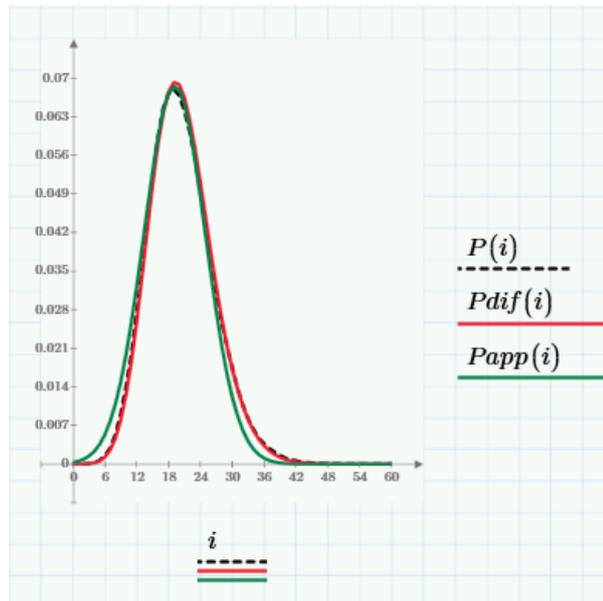


Рисунок 6.19 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\alpha = 10, \sigma = 1$

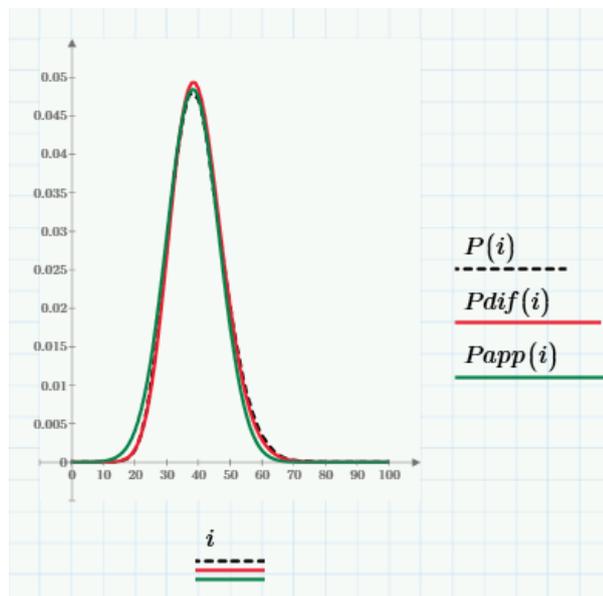


Рисунок 6.20 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\alpha = 20, \sigma = 1$

Реализуя алгоритм построения аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок ($\mu_2 \rightarrow 0$) и алгоритм построения диффузионной аппроксимации в рассматриваемой RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками, зададим матрицу Λ в виде (6.14), $N = 4$, $\rho = 0.5$, $\mu_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, матрицу \mathbf{Q} в виде (6.13). Параметры μ_n , $n = \overline{2, N}$ представим в виде $\mu\eta_n$, $n = \overline{2, N}$ для удобства сравнения. Положим $\eta_2 = 2$, $\eta_3 = 3$, $\eta_4 = 4$.

Таблица 6.6 – Расстояние Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$
Δ_2					
$\mu = 0.5$	0.061	0.016	0.016	0.012	0.010
	0.361	0.252	0.251	0.262	0.296
$\mu = 0.1$	0.096	0.067	0.049	0.035	0.009
	0.100	0.090	0.101	0.095	0.105
$\mu = 0.05$	0.125	0.087	0.073	0.044	0.013
	0.053	0.048	0.046	0.051	0.067
$\mu = 0.03$	0.142	0.104	0.077	0.052	0.034
	0.031	0.030	0.030	0.038	0.040

Из данных представленных в таблице 6.6 можем сделать вывод, что точность диффузионной аппроксимации превышает точность аппроксимации в предельном условии при $\mu > 0.05$, однако точность диффузионной аппроксимации падает с уменьшением параметра μ . Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

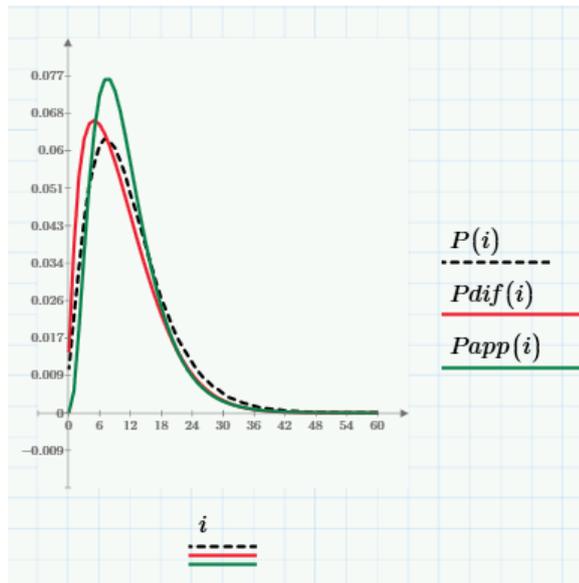


Рисунок 6.21 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\mu = 0.05$, $\sigma = 5$

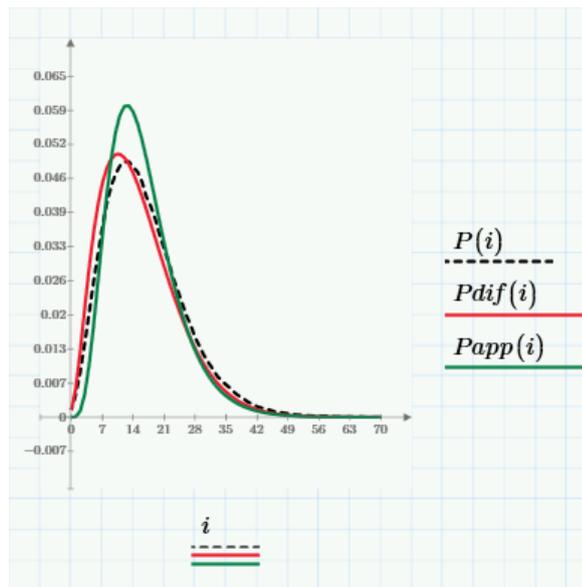


Рисунок 6.22 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\mu = 0.05$, $\sigma = 3$

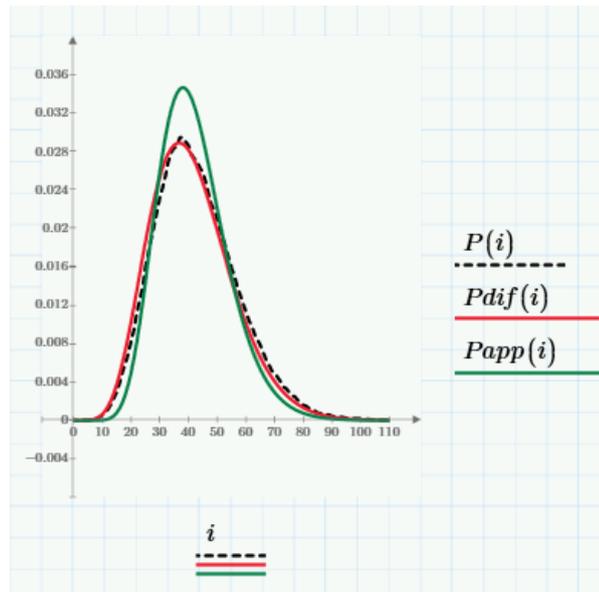


Рисунок 6.23 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\mu = 0.05$, $\sigma = 1$

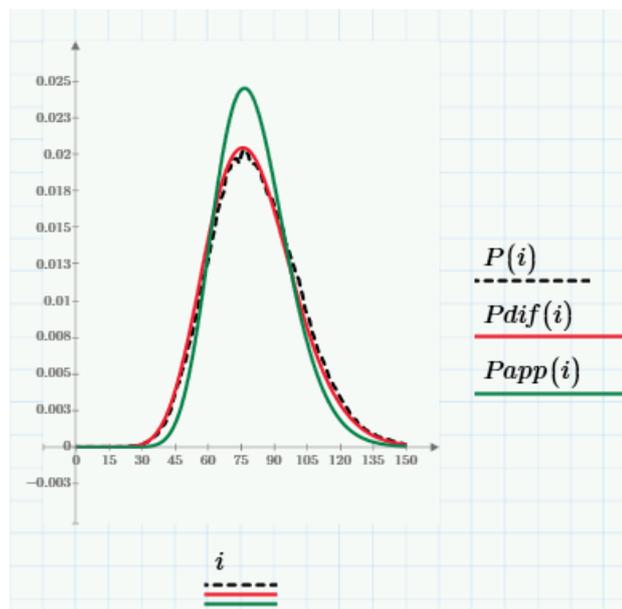


Рисунок 6.24 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.5$

6.2.2 RQ-система M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором

Для определения точности полученных в главах 3 и 4 аппроксимаций дискретного распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы с ненадежным прибором опишем алгоритмы построения аппроксимаций.

Алгоритм построения гауссовской аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$).

1. Задание значений параметров системы $N, \lambda, \mu_1, \mu_n, \alpha_n, n = \overline{2, N}, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, величину загрузки системы $\rho \in (0, 1)$.
2. Нахождение параметра κ_1 по формуле (3.94).
3. Нахождение параметра κ_2 по формуле (3.101).
4. Построение дискретной гауссовской аппроксимации распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите по формуле (3.89)

$$P_{app}(i) = \frac{F(i + 0.5) - F(i - 0.5)}{1 - F(-0.5)},$$

здесь $F(x)$ – функция распределения гауссовской случайной величины с параметрами κ_1/σ и $\sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}$.

Алгоритм построения диффузионной аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе.

1. Задание значений параметров системы $N, \lambda, \mu_1, \mu_n, \alpha_n, n = \overline{2, N}, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, величину загрузки системы $\rho \in (0, 1)$.
2. Нахождение функций $r_k = r_k(x)$ вероятностей состояний прибора по формулам (4.38) для каждого x .
3. Определение коэффициента переноса $a(x)$ в виде (4.42).
4. Нахождение функций $g_k = g_k(x)$ как решения системы (4.49) для каждого x .
5. Определение коэффициента диффузии $b(x)$ в виде (4.48).

6. Определение неотрицательной функции $G(i)$ дискретного аргумента i в виде

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}.$$

7. Построение аппроксимации $P_{dif}(i)$ распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для RQ-систем с использованием метода асимптотически-диффузионного анализа по формуле (4.33).

Точность аппроксимации $P_{dif}(i)$ определяется с помощью расстояния Колмогорова Δ_1 равенством (6.12), которое показывает разницу между распределениями вероятностей $P(i)$ и $P_{dif}(i)$, где $P_{im}(i)$ получено с помощью имитационного моделирования, $P_{dif}(i)$ получено в виде (4.33), в котором коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются формулами (4.42) и (4.48) соответственно.

Для сравнения с аппроксимациями (3.89) и (6.10), полученными с помощью метода асимптотического анализа зададим расстояние Колмогорова Δ_2 в виде (6.13).

Реализуя алгоритм построения гауссовской аппроксимации числа заявок на орбите и алгоритм построения диффузионной аппроксимации в рассматриваемой RQ-системе $M|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором в условии большой задержки заявок на орбите, зададим необходимые параметры исследуемой системы $\lambda = 2$, $N = 3$, $\alpha_n = n$, $\mu_n = n$, $n = \overline{1,3}$, $\gamma_0 = 0.1$, $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 1$.

В таблице 4.4 приведены значения расстояний Колмогорова для различных параметров σ и загрузки системы ρ .

Таблица 6.7 – Расстояния Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$
Δ_2				
$\rho = 0.3$	0.023	0.022	0.013	0.011
	0.089	0.074	0.047	0.045
$\rho = 0.6$	0.016	0.012	0.008	0.003
	0.089	0.072	0.045	0.032
$\rho = 0.9$	0.009	0.007	0.006	0.005
	0.086	0.067	0.032	0.022

Анализируя данные таблицы 6.7, видно, что точность диффузионной аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и увеличении загрузки системы ρ , при этом точность гауссовской аппроксимации растет с уменьшением параметра σ и почти не изменяется при росте загрузки системы ρ . Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной. Гауссовская аппроксимация дает хорошие результаты при низкой интенсивности повторного обслуживания ($\sigma = 0.1$ и $\sigma = 0.05$). Аппроксимация асимптотически-диффузионного анализа достаточно точна при любом значении параметра σ , которые представлены в таблице 6.7.

Сравнение графиков асимптотической $P_{app}(i)$, диффузионной $P_{dif}(i)$ и допредельной $P(i)$ плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите представлено на рисунках 6.25 – 6.28.

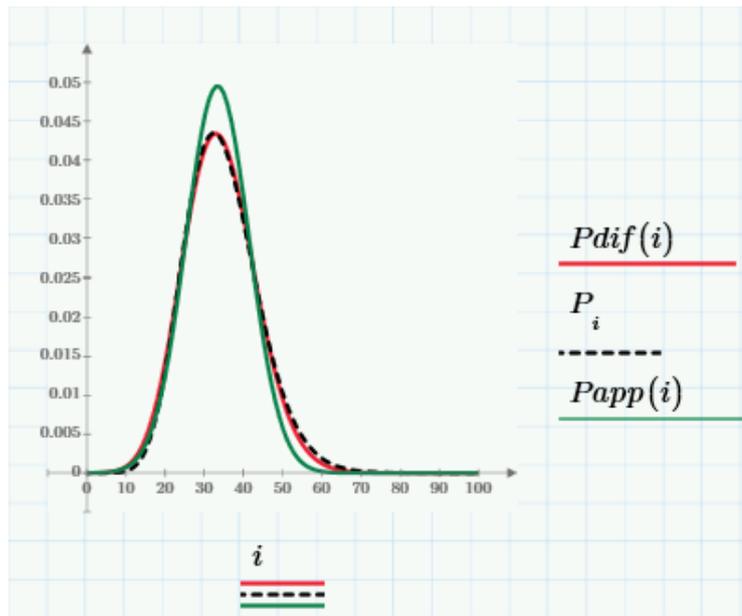


Рисунок 6.25 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\rho = 0.3$, $\sigma = 0.3$

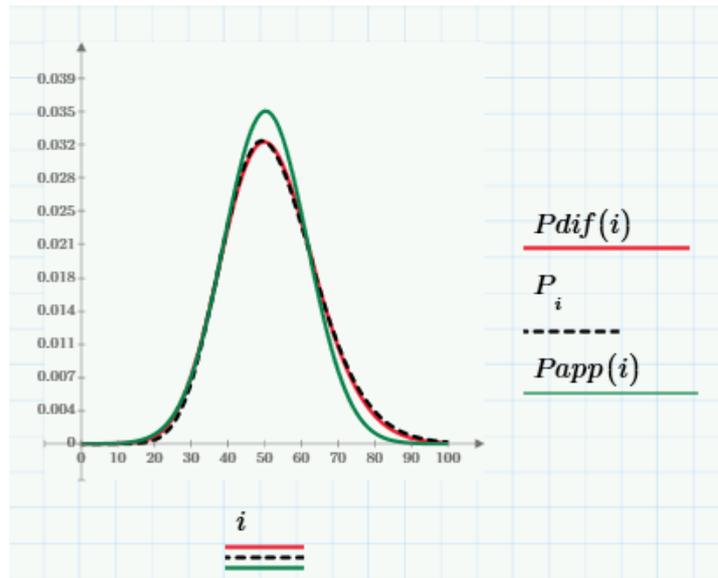


Рисунок 6.26 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\rho = 0.5$, $\sigma = 0.3$

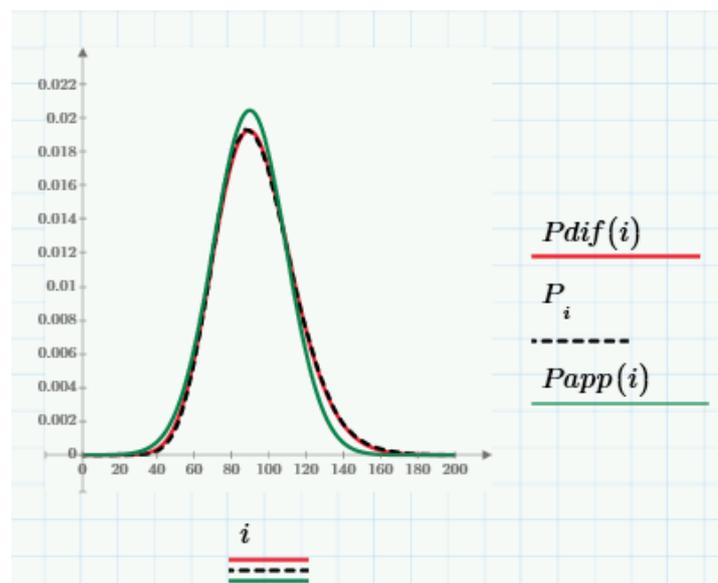


Рисунок 6.27 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\rho = 0.7$, $\sigma = 0.3$

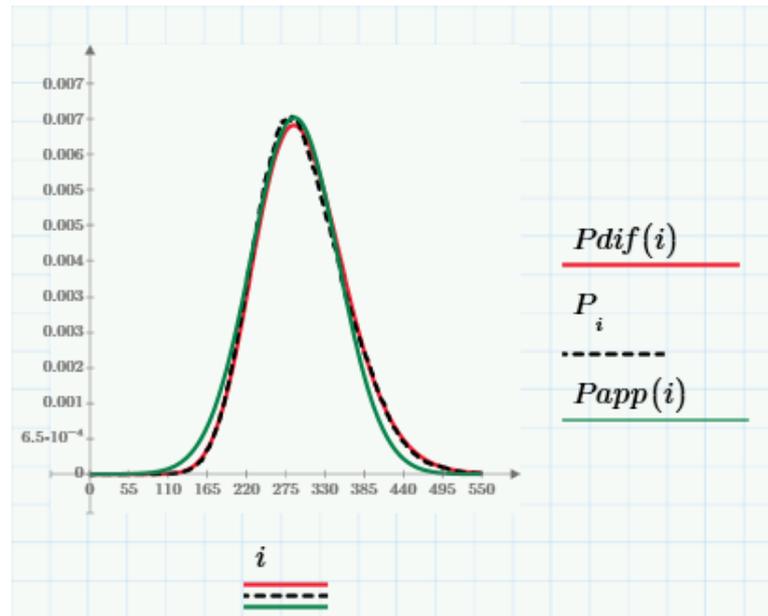


Рисунок 6.28 – Сравнение графиков асимптотических аппроксимаций $P_{app}(i)$, $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\rho = 0.9$, $\sigma = 0.3$

6.2.3 Тандемная RQ-система с общей орбитой

В главе 3 предложена гауссовская аппроксимация числа заявок на орбите в тандемной RQ-системе с простейшим входящим потоком. В главе 4 предложена аппроксимация, полученная с помощью метода асимптотически диффузионного анализа для такой тандемной системы с MMPP входящим потоком. Простейший поток является частным случаем MMPP-потока, поэтому используя результаты главы 4 не сложно получить диффузионную аппроксимацию для тандемной RQ-системы с общей орбитой и простейшим входящим потоком. Алгоритм построения гауссовской аппроксимации в условии большой задержки заявок на орбите и алгоритм построения диффузионной аппроксимации числа заявок на орбите в рассматриваемой RQ-системе аналогичны алгоритмам в пункте 6.2.2.

Точность аппроксимации $P_{dif}(i)$ определяется с помощью расстояния Колмогорова Δ_1 (6.10), которое показывает разницу между распределениями вероятностей $P_{im}(i)$ и $P_{dif}(i)$, где $P_{im}(i)$ получено с помощью имитационного моделирования, $P_{dif}(i)$ получено в виде (4.33), в котором коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются

формулами (4.69) и (4.78) соответственно. Если мы положим все элементы $\lambda = \lambda_k = 2$ в матрице Λ , то мы получим простейший поток с интенсивностью λ . Для сравнения с точностью гауссовской аппроксимации в виде (3.89) для данной системы, полученной с помощью метода асимптотического анализа зададим расстояние Колмогорова Δ_2 в виде (6.13), определив интенсивности обслуживания $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

Таблица 6.8 – Расстояния Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 2$	$\sigma = 1.3$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.02$
Δ_2						
$\rho = 0.5$	0.061	0.049	0.011	0.033	0.019	0.013
	0.094	0.101	0.142	0.071	0.034	0.022
$\rho = 0.6$	0.041	0.025	0.027	0.023	0.012	0.009
	0.158	0.134	0.125	0.049	0.039	0.024
$\rho = 0.8$	0.006	0.017	0.030	0.012	0.035	0.011
	0.258	0.224	0.146	0.071	0.036	0.031
$\rho = 0.9$	0.009	0.018	0.021	0.008	0.003	0.004
	0.363	0.305	0.198	0.097	0.074	0.049

Анализируя результаты таблицы 6.8, можно сделать вывод, что аппроксимация, построенная с помощью асимптотически диффузионного анализа в 7,5 раз точнее, чем гауссовская аппроксимация и может быть использован для $\sigma < 1.3$, при этом точность обеих аппроксимаций растет с уменьшением параметра σ , и диффузионная аппроксимация имеет высокую точность для всех значениях параметров σ и ρ , указанных в таблице.

Полужирным в таблице 6.8 выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

Для тандемной RQ-системы с ММРР входящим потоком и общей орбитой определим матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & -0.7 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Обозначим ρ ($0 < \rho < 1$) загрузку системы, а значение условных интенсивностей входящего потока – элементов матрицы Λ , учитывая условие существования стационарного режима $\mathbf{r}_1 \Lambda \mathbf{e}_1 < \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$, определим равенством

$$\Lambda = \rho \cdot \frac{\Lambda_1}{\mathbf{r}_1 \Lambda_1 \mathbf{e}_1} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \text{ определим параметры обслуживания } \mu_1 = 1, \mu_2 = 2.$$

Точность аппроксимации $P_{dif}(i)$ определяется с помощью расстояния Колмогорова Δ_1 (6.10), которое показывает разницу между распределениями вероятностей $P_{im}(i)$ и $P_{dif}(i)$, где $P_{im}(i)$ получено с помощью имитационного моделирования, $P_{dif}(i)$ получено в виде (4.33), в котором коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определяются формулами (4.69) и (4.78) соответственно, реализуя алгоритм построения диффузионной аппроксимации, который аналогичен алгоритму в п.6.2.2. В таблице 6.9 представлены результаты сравнения.

Таблица 6.9 – Расстояния Колмогорова

Δ_1	$\sigma = 2$	$\sigma = 1.5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.01$
	0.057	0.049	0.033	0.011	0.033	0.019	0.007

Сравнение графиков аппроксимирующей $P_{dif}(i)$ и допредельной $P(i)$ плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите представлено на рисунках 6.29 – 6.31.



Рисунок 6.29 – Сравнение графиков $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 10, \rho = 0.5$

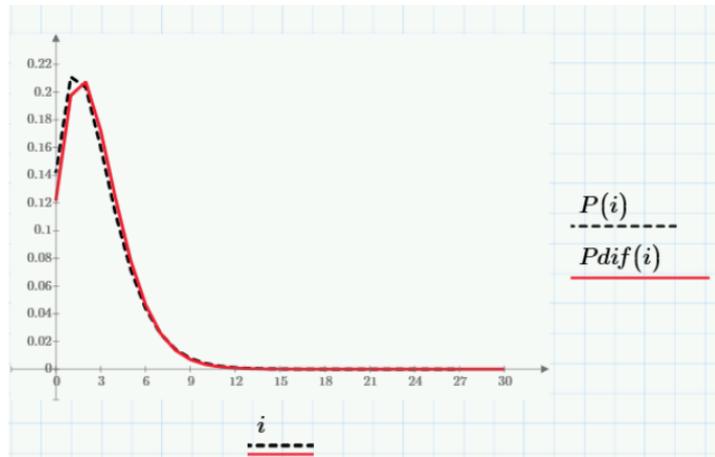


Рисунок 6.30 – Сравнение графиков $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 0.5, \rho = 0.5$

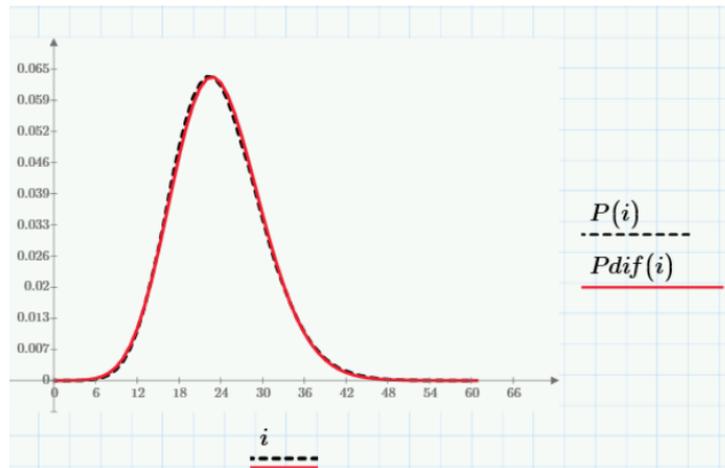


Рисунок 6.31 – Сравнение графиков $P_{dif}(i)$ и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 0.01, \rho = 0.5$

6.2.4 Многолинейная RQ-система $M|H_2|N$

В главе 5 доказано, что в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ стационарное трехмерное распределение вероятностей $P(n_1, n_2, i, t)$ числа занятых приборов и заявок на орбите можно представить в виде произведения

$$P(n_1, n_2, i, t) = R(n_1, n_2)P(i)$$

двумерного распределения $R(n_1, n_2)$ числа приборов, занятых на первой и второй фазах гиперэкспоненциального распределения вероятностей времени обслуживания заявки в RQ-системе $M|H_2|N$ и одномерного распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите. Так как в стационарном режиме дифференциальное уравнение (5.10) обращается в равенство $a(x) = 0$, которое является уравнением относительно x , то его положительное решение обозначим $x = \kappa$, а значения вероятностей $R(n_1, n_2)$ определим равенством

$$R_1(n_1, n_2) = R(n_1, n_2, \kappa), \quad (6.16)$$

где переменную x полагаем равной κ . Вероятность того, что в N -линейной системе занято n приборов при $x = \kappa$ обозначим $R_1(n)$.

Алгоритм построения аппроксимации $R(n_1, n_2) = R(n_1, n_2, x)$ содержит следующие этапы.

1. Задание значений параметров системы $N, \mu_1, \mu_2, q_1, q_2$, загрузки системы ρ ($0 < \rho < 1$), интенсивности входящего потока $\lambda = \rho N$.

2. Решение уравнения (5.8) для матрицы $\mathbf{R}(x)$, определяемое линейными однородными конечно разностными операторами $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1$ двух дискретных переменных n_1 и n_2 для элементов $R(n_1, n_2, x)$, находится в виде (5.3) и (5.4) при заданных значениях $N, \lambda, \mu_1, \mu_2, q_1$ и q_2 , удовлетворяющее условию нормировки

$$\sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x) = 1.$$

3. Из равенства (5.10) запишем вид функции

$$a(x) = (\lambda + x) \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) - x \sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x).$$

Это выражение можно упростить, обозначив

$$\sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) = r(x), \quad (6.17)$$

и применяя условие нормировки

$$1 = \sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x) = \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) + \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x),$$

тогда функцию $a(x)$ можно записать в виде

$$a(x) = (\lambda + x(\tau))r(x) - x(\tau).$$

4. Численно найдем решение $x = \kappa$ уравнения $a(x) = 0$.
5. Подставляя в $R(n_1, n_2, x)$ значение $x = \kappa$, получим значения вероятностей

$$R(n_1, n_2) = R(n_1, n_2, \kappa),$$

аппроксимирующих двумерное допредельное дискретное распределение $P(n_1, n_2)$ числа приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания.

Для построения аппроксимации $P_1(i)$ для дискретного распределения $P(i)$ вернемся к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$.

Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P_1(i)$ дискретного случайного процесса $\sigma i(\tau)$ можно осуществить разными способами. Укажем один из них. В силу равенства (5.38), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде:

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}. \quad (6.18)$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем следующее дискретное распределение вероятностей

$$P_1(i) = G(i) / \sum_{i=0}^{\infty} G(i). \quad (6.19)$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $P_1(i)$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы.

Алгоритм построения аппроксимации $P_1(x)$ содержит следующие этапы.

1. Уравнение системы (5.20), определяющее матрицу $\mathbf{g}(x)$ перепишем для ее элементов $g(n_1, n_2, x)$. При заданных значениях N, λ, μ_1 и μ_2 найдем решение $g(n_1, n_2, x)$ этой системы, зависящее от x , удовлетворяющее условию $\sum_{n_1+n_2 \leq N} g(n_1, n_2, x) = 0$.

2. Из равенства (5.19) запишем вид функции $b(x)$.

3. Получив функцию $a(x)$ и $b(x)$ найдем значение функции $G(i)$ по формуле (6.18).
4. Применяя равенство (6.19), получим значения распределения вероятностей $P_1(i)$, аппроксимирующее допредельное распределение $P(i)$ числа i заявок на орбите рассматриваемой RQ-модели.

Найденное распределение позволяет получить еще одну, кроме (6.16) аппроксимацию, распределение вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазах. В равенстве (5.3) значения детерминированной переменной x заменим значениями случайного процесса z и применяя (6.19) усредним по этим значениям, получим

$$R_2(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^{\infty} R(n_1, n_2, \sigma i) P_1(i), \quad (6.20)$$

где $R(n_1, n_2, x)$ определяется равенством (5.3). Вероятность того, что в N -линейной системе занято n приборов, в случае, когда значения x заменены значениями случайного процесса z , обозначим $R_2(n)$.

Для исследования точности предлагаемых аппроксимаций для распределения вероятностей $R(n)$ числа n занятых приборов и для распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите (5.42) N -линейной RQ-системы $M|H_2|N$ с гиперэкспоненциальным обслуживанием была разработана имитационная модель этой RQ-системы, позволившая найти оценки распределений $R_{im}(n)$ и $P_{im}(i)$.

При составлении имитационной модели накладывалось условие ее высокой точности, которую определим следующим образом. По двум независимым выборкам, реализованным на имитационной модели, получаем распределения вероятностей $P_{im_1}(i)$ и $P_{im_2}(i)$ числа заявок на орбите. Определим значение расстояния Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i P_{im_1}(v) - P_{im_2}(v) \right|$$

между распределениями $P_{im_1}(i)$ и $P_{im_2}(i)$.

Надежность имитационной модели считаем достаточной, если величина $\Delta < 0.001$. Аналогично определяется расстояние Колмогорова между распределениями $P_{im1}(n)$ и $P_{im2}(n)$ для числа n занятых приборов, которое также должно быть меньше 0.001. Далее определяются значения расстояний Колмогорова между распределениями вероятностей $P(i)$, полученного по формуле (6.19) и $P_{im}(i)$ реализацией имитационной модели.

Будем полагать среднее значение времени обслуживания равным единице. В численных примерах рассмотрим пятилинейные RQ-системы, когда $N = 5$.

Обозначим ρ ($0 < \rho < 1$) загрузку системы, а значение λ интенсивности входящего потока определим равенством $\lambda = \rho N$. Рассмотрим RQ-систему с гиперэкспоненциальным обслуживанием, положив $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 3$, $q_1 = 0.4$, $q_2 = 0.6$ при указанных в таблицах значениях параметров ρ и σ . В Таблице 5.1 приведены значения расстояний Колмогорова

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq n \leq 5} \left| \sum_{v=0}^n R_1(v) - R(v) \right|, \quad \Delta_2 = \max_{0 \leq n \leq 5} \left| \sum_{v=0}^n R_2(v) - R(v) \right|$$

между распределением вероятностей $R(n)$, полученного реализацией имитационной модели и аппроксимациями $R_1(n)$ и $R_2(n)$ этого распределения, полученного по формулам (46) и (49).

Таблица 6.10 – Расстояния Колмогорова для аппроксимаций $R_1(n)$ и $R_2(n)$ числа занятых приборов

	Δ	$\sigma = 2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\rho = 0.6$	Δ_1	0.044	0.032	0.020	0.011	0.006
	Δ_2	0.059	0.053	0.042	0.019	0.008
$\rho = 0.7$	Δ_1	0.065	0.046	0.030	0.015	0.009
	Δ_2	0.083	0.063	0.038	0.013	0.003
$\rho = 0.8$	Δ_1	0.078	0.056	0.037	0.019	0.011
	Δ_2	0.075	0.050	0.025	0.005	0.002
$\rho = 0.9$	Δ_1	0.073	0.049	0.030	0.015	0.008

	Δ_2	0.045	0.021	0.008	0.001	0.001
--	------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

Анализируя результаты в Таблице 6.10, трудно выделить более предпочтительную аппроксимацию для всех значений параметров. Но для значений $\rho \leq 0.7$ более предпочтительной оказывается первая аппроксимация $R_1(n)$, полученная по формуле (6.16). При $\rho > 0.7$ предпочтительнее выглядит вторая аппроксимация $R_2(n)$, полученная по формуле (6.20). В силу простоты, будем считать более предпочтительной первую аппроксимацию, так как по точности первая и вторая аппроксимации различаются незначительно.

В Таблице 6.11 приведены значения расстояний Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i P_1(v) - P(v) \right|$$

между распределениями вероятностей $P_1(i)$, полученного по формуле (6.19) и $P(i)$, полученного реализацией имитационной модели.

Таблица 6.11 – Расстояния Колмогорова для аппроксимации $P_1(i)$ числа заявок на орбите

	$\sigma = 2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\rho = 0.6$	0.085	0.129	0.141	0.082	0.039
$\rho = 0.7$	0.122	0.122	0.081	0.027	0.014
$\rho = 0.8$	0.104	0.070	0.032	0.011	0.014
$\rho = 0.9$	0.052	0.022	0.003	0.012	0.010

Из табличных значений следует, что точность предлагаемой в (6.19) аппроксимации возрастает (Δ уменьшается) с уменьшением величины σ , которая в теоретических исследованиях полагалась бесконечно малой. Здесь же расстояние Колмогорова $\Delta \leq 0.05$ для всех значений сетевых параметров σ и ρ правого нижнего угла таблицы. При $\rho = 0.9$ это неравенство выполняется при всех значениях $\sigma \leq 1$, что говорит о достаточно широкой области применимости предлагаемой в (6.19) аппроксимации $P_1(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой пятилинейной

RQ-системы с гиперэкспоненциальным обслуживанием заявок при заданных значениях $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 3$, $q_1 = 0.4$. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

6.2.5 Многолинейная RQ-система M|M, M|N с двухфазным специальным обслуживанием

В главе п. 5.2 решена задача нахождения достаточно точных аппроксимаций дискретного распределения $P(n_1, n_2)$ числа n_1 и n_2 приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания и распределения вероятностей $P(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой N -линейной RQ-системы.

Двумерное распределение вероятностей $P(n_1, n_2)$ числа приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания можно аппроксимировать элементами $R(n_1, n_2, x)$ треугольной матрицы $\mathbf{R}(x)$, выбрав значение x функции $x(\tau)$ определяемой дифференциальным уравнением $x'(\tau) = a(x)$. Для стационарных вероятностей $P(n_1, n_2)$ в аппроксимации $R(n_1, n_2, x)$ значение x будем выбирать $x = \kappa$, где κ – положительный корень уравнения

$$a(x) = 0. \quad (6.21)$$

Алгоритм построения аппроксимации $R(n_1, n_2) = R(n_1, n_2, x)$ содержит следующие этапы.

1. Уравнение (5.48) для матрицы $\mathbf{R}(x)$, определяемое двумерными конечно-разностными операторами \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{I}_0 и \mathbf{I}_1 перепишем для элементов $R(n_1, n_2, x)$ этой матрицы:

при $n_1 + n_2 = 0$:

$$-(\lambda + x)R(0, 0, x) + \mu_2 R(0, 1, x) = 0,$$

при $1 \leq n_1 + n_2 \leq N$

$$\begin{aligned} &(\lambda + x)R(n_1 - 1, n_2, x) - \{\lambda + x + n_1\mu_1 + n_2\mu_2\}R(n_1, n_2, x) + \\ &+ (n_1 + 1)\mu_1 R(n_1 + 1, n_2 - 1, x) + n_2\mu_2 R(n_1 + 1, n_2, x) = 0, \end{aligned}$$

при $n_1 + n_2 = N$

$$(\lambda + x)R(n_1 - 1, n_2, x) - \{n_1\mu_1 + n_2\mu_2\}R(n_1, n_2, x) + (n_1 + 1)\mu_1 R(n_1 + 1, n_2 - 1, x) = 0,$$

и при заданных значениях N , λ , μ_1 и μ_2 найдем решение $R(n_1, n_2, x)$ этой системы,

удовлетворяющее условию нормировки $\sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x) = 1$.

2. Из равенства (5.53) запишем вид функции

$$a(x) = \lambda \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) - x \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x).$$

Это выражение можно упростить, обозначим

$$\sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) = r(x), \quad (6.22)$$

и применяя условие нормировки

$$1 = \sum_{n_1+n_2 \leq N} R(n_1, n_2, x) = \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) + \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x),$$

тогда функцию $a(x)$ можно записать в виде

$$a(x) = (\lambda + x(\tau))r(x) - x(\tau).$$

3. Численно найдем решение $x = \kappa$ уравнения $a(x) = 0$.

4. Подставляя в $R(n_1, n_2, x)$ значение $x = \kappa$ значения вероятностей $R(n_1, n_2)$,

получим в виде

$$R(n_1, n_2) = R(n_1, n_2, \kappa),$$

аппроксимирующим двумерное допредельное дискретное распределение $P(n_1, n_2)$ числа приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания.

5. Найдя аппроксимацию $R(n_1, n_2)$ равенством

$$R(n) = \sum_{n_1=0}^n R(n_1, n - n_1),$$

получим аппроксимацию одномерного распределения вероятностей $R(n)$ числа n приборов, занятых в рассматриваемой RQ-системе.

Для построения аппроксимации дискретного распределения $P(i)$ вернемся к плотности $s(z)$ случайного процесса $z(\tau)$.

Переход от плотности распределения $s(z)$ непрерывного случайного процесса $z(\tau)$ к дискретному распределению $P(i)$ дискретного случайного процесса $\sigma i(\tau)$ можно осуществить разными способами. Укажем один из них. В силу равенства (47), запишем неотрицательную функцию $G(i)$ дискретного аргумента i в виде (6.18)

$$G(i) = \frac{C}{b(\sigma i)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma i} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}.$$

Принимая во внимание условие нормировки, запишем дискретное распределение вероятностей в виде (6.19)

$$P_1(i) = G(i) / \sum_{i=0}^{\infty} G(i).$$

Предложенное дискретное распределение вероятностей $P_1(i)$ будем применять для аппроксимации распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$ числа i звонков на орбите для рассматриваемой RQ-системы.

Алгоритм построения аппроксимации $P_1(x)$ содержит следующие этапы.

1. Матричное уравнение (5.68), определяющее матрицу $\mathbf{g}(x)$ перепишем для ее элементов $g(n_1, n_2, x)$:

при $n_1 + n_2 = 0$:

$$-(\lambda + x)g(0, 0, x) + \mu_2 g(0, 1, x) = a(x)R(0, 0, x),$$

при $1 \leq n_1 + n_2 \leq N - 1$

$$\begin{aligned} &(\lambda + x)g(n_1 - 1, n_2, x) - \{\lambda + x + n_1\mu_1 + n_2\mu_2\}g(n_1, n_2, x) + \\ &+ (n_1 + 1)\mu_1 g(n_1 + 1, n_2 - 1, x) + n_2\mu_2 g(n_1 + 1, n_2, x) = \\ &a(x)R(n_1, n_2, x) + xR(n_1 - 1, n_2, x), \end{aligned}$$

при $n_1 + n_2 = N$

$$(\lambda + x)g(n_1 - 1, n_2, x) - \{n_1\mu_1 + n_2\mu_2\}g(n_1, n_2, x) + (n_1 + 1)\mu_1 g(n_1 + 1, n_2 - 1, x) =$$

$$(a(x) - \lambda)R(n_1, n_2, x) + xR(n_1 - 1, n_2, x).$$

При заданных значениях N , λ , μ_1 и μ_2 найдем решение $g(n_1, n_2, x)$ этой системы, удовлетворяющее условию $\sum_{n_1+n_2 \leq N} g(n_1, n_2, x) = 0$.

2. Из равенства (5.67) запишем вид функции

$$b(x) = a(x) + 2 \left[(\lambda + x) \sum_{n_1+n_2=N} g(n_1, n_2, x) + x \sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x) \right].$$

Здесь

$$\sum_{n_1+n_2 \leq N-1} R(n_1, n_2, x) = 1 - \sum_{n_1+n_2=N} R(n_1, n_2, x) = 1 - r(x).$$

Поэтому функцию $b(x)$ можно записать в виде:

$$b(x) = a(x) + 2 \left[(\lambda + x) \sum_{n_1+n_2=N} g(n_1, n_2, x) + x(1 - r(x)) \right].$$

3. Получив функцию $a(x)$ и $b(x)$ найдем значение функции $G(i)$ по формуле (6.18).

4. Применяя равенство (6.19), получим значения распределения вероятностей $P_1(i)$, аппроксимирующее допредельное распределение $P(i)$ числа i заявок на орбите рассматриваемой RQ-модели.

Для исследования точности предлагаемых аппроксимаций была разработана имитационная модель этой RQ-системы, позволившая найти оценки распределений числа n приборов, занятых в RQ-системе и числа заявок i на орбите.

Объемы выборок по результатам имитационного моделирования были выбраны таким образом, чтобы точность, определяемая расстоянием Колмогорова, оцениваемых распределений по независимым выборкам составляла менее 0.001.

Расстояние Колмогорова между двумя дискретными распределениями $P_1(i)$ и $P_2(i)$ определяется равенством:

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i P_1(v) - P_2(v) \right|.$$

Для численных примеров были выбраны следующие значения параметров системы: $N = 5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$. Интенсивность λ входящего потока будем определять из условия существования стационарного режима

$$\lambda = \rho N \mu_2 \frac{(N-1)\mu_2 + \mu_1}{N\mu_2 + \mu_1}. \quad (6.23)$$

определив параметр загрузки системы $\rho \in [0; 1)$.

Таблица 6.12 – Расстояния Колмогорова Δ для аппроксимации $P_1(i)$ числа заявок на орбите

	$\sigma = 2$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$
$\rho = 0.6$	0.058	0.096	0.091	0.040	0.014
$\rho = 0.7$	0.084	0.081	0.047	0.012	0.007
$\rho = 0.8$	0.065	0.040	0.015	0.004	0.003
$\rho = 0.9$	0.025	0.010	0.002	0.001	0.001

Из табличных значений следует, что точность предлагаемой в (6.19) аппроксимации возрастает с уменьшением величины σ . Здесь же расстояние Колмогорова $\Delta \leq 0.05$ для всех значений сетевых параметров σ и ρ правого нижнего угла таблицы. При $\rho = 0.9$ это неравенство выполняется при всех значениях $\sigma \leq 1$, что говорит о широкой области применимости предлагаемой в (6.19) аппроксимации $P_1(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы. Полужирным в таблице выделены те значения, при которых будем считать точность аппроксимации вполне приемлемой, достаточно точной и сверхточной.

Сравнение графиков диффузионной $P_{dif}(i)$ и допредельной $P(i)$ плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите представлено на рисунках 6.32 – 6.31.

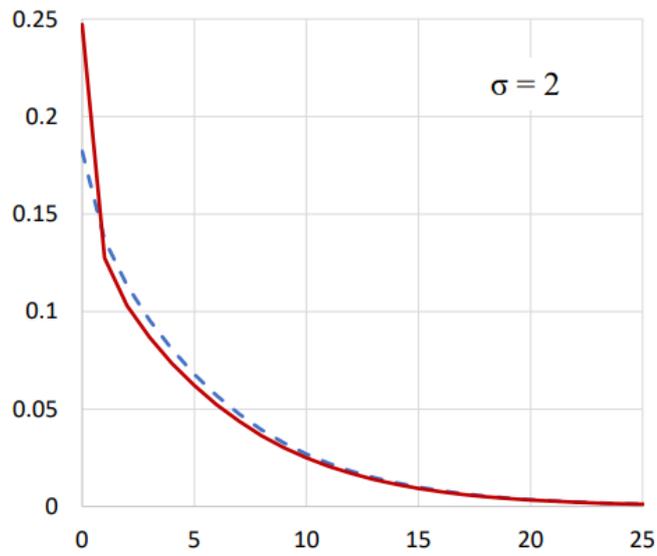


Рисунок 6.32 – Сравнение графиков аппроксимирующей и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 2$, $\rho = 0.8$

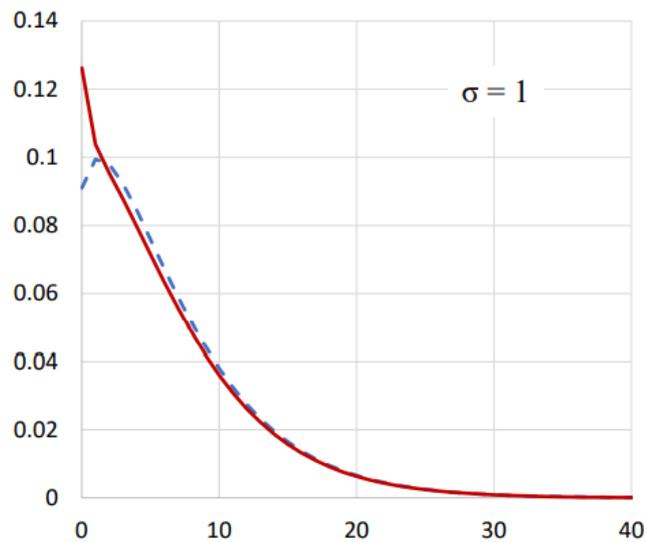


Рисунок 6.33 – Сравнение графиков аппроксимирующей и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 1$, $\rho = 0.8$

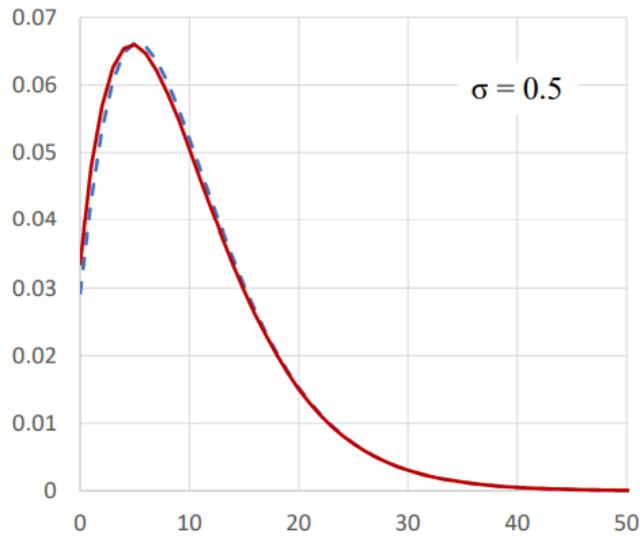


Рисунок 6.34 – Сравнение графиков аппроксимирующей и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 0.5$, $\rho = 0.8$

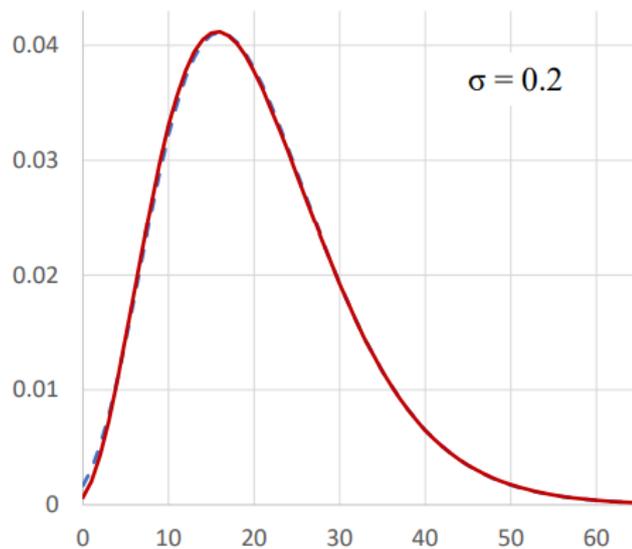


Рисунок 6.35 – Сравнение графиков аппроксимирующей и допредельной плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите при $\sigma = 0.2$, $\rho = 0.8$

6.3 Резюме

В данной главе представлены результаты численного анализа полученных предыдущих главах аппроксимаций и их областей применимости. В качестве критерия оценки точности использовалось расстояния Колмогорова между эмпирическим распределением, полученным в результате имитационного моделирования, с соответствующей аппроксимацией.

При исследовании потоков, показано, что для достаточно больших значений времени t ($t > 200$) реализация численных алгоритмов нахождения допредельных распределений вероятностей объема информации, поступившей в заявках исследуемых потоков становится практически невозможным, и в этом случае целесообразно применение асимптотических результатов. Распределение вероятностей объема информации, поступившей в заявках предложенных моделей потоков за время t каждого из рассмотренных типов, может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$.

Анализ RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками, с ненадежным прибором, тандемной RQ-системы с общей орбитой представлен асимптотическим методом в различных предельных условиях и асимптотически-диффузионным методом. Построены аппроксимации распределений вероятностей числа заявок на орбите для всех систем. На численных примерах показана точность построенных аппроксимаций, а также проведено исследование результатов асимптотического и асимптотически-диффузионного анализа в сравнении с распределением вероятностей, полученным с помощью имитационного моделирования. Анализируя результаты делается вывод, что аппроксимации могут быть использованы для широкого множества значений параметров, описывающих системы, включая значения загрузки системы ρ .

В результате применения метода асимптотически диффузионного анализа для исследования многолинейных систем получен диффузионный процесс, плотность распределения вероятностей которого используется в качестве аппроксимации для распределения вероятностей числа заявок на орбите и числа занятых приборов в системе.

Проводя численные эксперименты в сравнении с результатами имитационного моделирования получены оценки точности предложенных аппроксимаций. Показано, что диапазон областей применимости достаточно широк. Результаты настоящей главы представлены в работах автора [76, 77].

Заключение

Диссертационное исследование посвящено разработке и применению математических методов исследования потоков событий со случайным объемом требований и систем массового обслуживания с повторными вызовами различной конфигурации.

Для предложенных моделей потоков, таких как поток восстановления, ММРР и полумарковский поток со случайным объемом поступающей информации получены достаточно простые выражения для распределения вероятностей значений объема информации, поступившей в исследуемом потоке за время t . Установлено что в предельном условии растущего времени наблюдения за потоком распределение вероятностей объема информации, поступившей в заявках предложенных моделей за время t является асимптотически гауссовским с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$, где величины κ_1 и κ_2 вычисляются по формулам, которые приведены в Таблице 1.1.

Анализ моделей массового обслуживания, выполненный в диссертационной работе, представлен различными методами исследования: методами асимптотического анализа в различных асимптотических условиях и методом асимптотически-диффузионного анализа.

Результаты всех исследований, выполненных различными методами для однолинейных систем с повторными вызовами, хорошо согласуются. Анализ RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками, с ненадежным прибором, тандемной RQ-системы с общей орбитой представлен асимптотическим методом в различных предельных условиях и асимптотически-диффузионным методом. Построены аппроксимации распределений вероятностей числа заявок на орбите для всех систем. Предложенные аппроксимации могут быть использованы для широкого класса параметров, описывающих системы, при этом точность диффузионной аппроксимации высока для широкого класса параметра загрузки системы.

Исследования многолинейных систем двух типов с повторными вызовами: с гиперэкспоненциальным временем обслуживания и специальным обслуживанием

заявок, – проведено асимптотически диффузионным методом в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Диапазон областей применимости предложенных аппроксимаций для этих моделей достаточно широк. Применение предложенного метода асимптотически диффузионного анализа возможно при исследовании многолинейных систем с повторными вызовами различной конфигурации, таких как, RQ-системы с вызываемыми заявками, и RQ-системы с произвольным распределением времени обслуживания.

Анализ области применимости полученных асимптотических результатов показал, что в большинстве случаев гауссовские аппроксимации являются приемлемыми и достаточно точными. Сравнивая точность диффузионной аппроксимации с точностью гауссовской аппроксимации, делается вывод, что точность диффузионной аппроксимации превышает точность гауссовской на порядок. При этом диффузионная аппроксимация имеет высокую точность для широкого диапазона параметров исследуемых систем.

Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания, с помощью которого выполнен численный анализ области применимости полученных теоретических результатов. Комплекс включает в себя алгоритмы численного анализа характеристик функционирования моделей массового обслуживания, реализованные в виде документов математического процессора Mathcad на основе теоретических результатов, полученных в диссертации.

Таким образом, основными научными достижениями данного диссертационного исследования являются:

1. Математические модели потоков событий, такие как поток восстановления, MMPP-поток, полумарковский поток со случайным объемом требований, обобщающие теорию ординарных и неординарных непуассоновских потоков, позволяющие учитывать особенности реального трафика в телекоммуникационных системах.

2. Модификации метода асимптотического анализа, позволяющие, в отличие от существующих подходов, выполнить анализ непуассоновских потоков событий

со случайным объемом информации в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками.

3. Допредельные интегральные формулы для нахождения распределения вероятностей объема информации, поступающей в предложенных непуассоновских потоках событий со случайным объемом требований за определенное время.

4. Предельное гауссовское распределение вероятностей объема информации, поступающей в потоке восстановления, ММРР и полумарковском потоке, для которого найдены явные выражения параметров предельного нормального распределения, обобщающие предельные теоремы из класса Центральной предельной теоремы.

5. Модификации методов асимптотического анализа систем с повторными вызовами на случай исследования RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками, RQ-систем с ненадежным прибором, тандемных RQ-систем с общей орбитой в различных предельных условиях, таких как условие большой задержки заявок на орбите, предложенных в диссертации предельных условий согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок. Применение данных модификаций обобщают известную методику исследования систем с повторными вызовами на случай более сложных конфигураций моделей и новых предельных условий.

6. Метод асимптотически диффузионного анализа, который обладает повышенной точностью, предназначенный для исследования однолинейных и многолинейных систем с повторными вызовами.

7. Выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей и их аппроксимаций числа заявок на орбите для однолинейных и многолинейных RQ-систем различной конфигурации, представленных в диссертационной работе.

8. Установлена область применимости полученных асимптотических результатов на основе численных экспериментов с использованием разработанного ком-

плекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа потоков событий со случайным объемом требований и RQ-систем различной конфигурации.

Литература

1. Башарин Г. П. Массовое обслуживание в телефонии / Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А. – М.: Наука, 1968. – 247 с.
2. Башарин Г. П. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов., Н. В. Яркина, И. А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 12. – С. 16–28.
3. Башарин Г. П., Клапоушак С. Н., Хуртин Д. В. Математическая модель центра обслуживания вызовов с учётом интернет-запросов // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2008. – №. 1. – P. 20-27.
4. Башарин Г. П., Самуйлов К. Е. Об однофазной системе массового обслуживания с двумя типами заявок и относительным приоритетом //Техническая кибернетика. – 1983. – Т. 3. – С. 48-56.
5. Бертсекас Д. Сети передачи данных / Бертсекас Д., Галлагер Р. – М.: Мир, 1989. – 544 с.
6. Блэк Ю. Сети ЭВМ: протоколы, стандарты, интерфейсы / Блэк Ю. – М.: Мир, 1990. – 510 с.
7. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. – М.: Наука, 1980. – 382 с.
8. Бочаров П. П. Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками / П. П. Бочаров, Ч. Д'Апиче, Р. Манзо, А. В. Печинкин // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 1. – С. 93–104.
9. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 520 с.
10. Вишневский В. М., Дудин А. Н., Клименок В. И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях // М.: Техносфера. – 2018.– С. 562.
11. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
12. Гайдамака Ю.В. Модели и методы анализа и расчета показателей эффективности беспроводных гетерогенных сетей / Ю. В. Гайдамака, Э. С. Сопин, И.А. Гудкова, С. Д. Андреев, С. Я. Шоргин, К.Е. Самуйлов. - М.: ФИЦ ИУ РАН, 2018. - 71 с.
13. Гайдамака, Ю. В. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова, К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 72 с.

14. Гарайшина, И. Р. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / И. Р. Гарайшина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
15. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. 4-е издание. – Москва: изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
16. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. – 5-е изд. испр. – М: Наука. – 2010. – 400 с.
17. Гнеденко Б. В. Элементарное введение в теорию массового обслуживания / Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. – 6-е изд. – М.: Наука, 1964. – 146 с.
18. Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2021. – № 54. – С. 28-37.
19. Дудин А. Н., Клименок В. И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. – Белорусский государственный университет (Минск), 2000. – С. 175.
20. Задорожный В. Н. Предпосылки создания фрактальной теории массового обслуживания // Омский научный вестник. – 2010. – №. 2 (90). – С. 182-187.
21. Задорожный В. Н., Захаренкова Т. Р. Оптимизация распределения каналов по узлам сетей с фрактальным трафиком // Динамика систем, механизмов и машин. – 2016. – Т. 3. – №. 1. – С. 336-340.
22. Зарипова Э. Р. Математическая модель центра обслуживания вызовов с двумя типами абонентов // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2010. – №. 4. – С. 76-82.
23. Зорин А. В. Статистический анализ и оптимизация тандема систем массового обслуживания в классе циклических алгоритмов с продлением / А. В. Зорин, В. М. Кочеганов // Управление большими системами. — 2019, вып. 78. — С. 122–148.
24. Ивченко Г. И. Теория массового обслуживания: учебное пособие для вузов / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. – Москва: Высшая школа, 1982. – 256 с.
25. Кендалл М. Теория распределений / Кендалл М., Стюарт А. – М.: Наука, 1966. – 587 с.
26. Китанин Л. Ф. Распределения Пуассона, асимптотические разложения / Л. Ф. Китанин // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-т. – 1955. – № 3. – С. 170–171.
27. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Клейнрок Л. Перевод с англ. / Пер. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

28. Кокс Д. Статистический анализ последовательностей событий / Д. Кокс, П. Льюис. – М.: изд. «Мир», 1969. – 310 с.
29. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления / Д. Кокс, В. Смит. – М.: Сов. радио, 1967 – 298 с.
30. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. – Киев: Наук. дум-ка, 1989. – 208 с.
31. Кузнецов Н. А. Оптимальное управление передачей данных в мобильной двуагентной робототехнической системе / Н. А. Кузнецов, Д. В. Мясников, К. Х. Семенихин // Информационные процессы. – 2016. – Т. 16. – №. 2. – С. 137–151.
32. Кутузов О. И., Татарникова Т. М. Модель поступлений в самоподобном трафике // Научный альманах. – 2016. – №. 2-2. – С. 371-375.
33. Лизюра О. Д. Асимптотический анализ RQ-системы $MMP|M|1$ с N типами вызываемых заявок в условии предельно редких изменений состояний входящего потока / О. Д. Лизюра, А. А. Назаров, С. В. Пауль // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Международной молодежной научной конференции. Томск, 23–25 мая, 2019 г. – Томск, 2019. – С. 241–246.
34. Лопухова С. В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: Дис. канд. наук / Томский государственный университет. — 2008. – 167 с.
35. Лопухова С. В. Исследование MMR-потока асимптотическим методом m-го порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3(4). – С. 71–76.
36. Лопухова С. В. Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа N-го порядка / С. В. Лопухова, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Серия Информатика. Кибернетика. Математика. – 2006. – № 293. – С. 110–115.
37. Любина Т. В., Назаров А. А. Исследование марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №. 3 (12). – С. 73-84.
38. Любина Т. В., Назаров А. А. Исследование немарковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2012. – №. 1. – С. 38-44.
39. Моисеев, А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.

40. Моисеев А. Н. Разработка объектно-ориентированной модели системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания / А. Н. Моисеев, М. В. Синяков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2010. — № 1. — С. 89–93.
41. Моисеева Е. А., Назаров А. А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2013. — №. 4 (25). — С. 84–94.
42. Морозова М. А. Модели телекоммуникационных систем связи в виде систем с повторными вызовами и вызываемыми заявками / М. А. Морозова, С. В. Пауль, А. А. Назаров // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. — Томск, — С. 277–284.
43. Назаров А. А. RQ-система с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. — Томск, 2019. — С. 245–249.
44. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. — Томск, 2019. — С. 239–244.
45. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2019. — № 48. — С. 13–20. — DOI: 10.17223/19988605/48/2.
46. Назаров, А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем: монография / А. А. Назаров — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. — 153 с.
47. Назаров А. А. Исследование BSMP-потока / А. А. Назаров, С. В. Пауль // материалы Международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения». Москва, 2012. — С. 202.
48. Назаров А. А. Исследование RQ-системы MMPP/M/1/1 с вызываемыми заявками асимптотическим методом / А. А. Назаров, С. В. Пауль // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 3 октября 2017 г. — Томск, 2017. — С. 314–321.

49. Назаров А. А. Исследование RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и обслуживанием заново прерванных заявок / А. А. Назаров, С. В. Пауль // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2018) : материалы XXI Международной научной конференции. Москва, 17–21 сентября, 2018 г. – Москва, 2018. – С. 253–260.
50. Назаров А. А. Исследование выходящего потока в RQ-системе M/M/1/1 с вызываемыми заявками / А. А. Назаров, И. Л. Лапатин, С. В. Пауль // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 3 октября 2017 г. – Томск, 2017. – С. 150–154.
51. Назаров А. А. Исследование выходящего потока заявок в системе с прогулками прибора / А. А. Назаров, С. В. Пауль // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Алтай, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – С. 102–107.
52. Назаров А. А. Исследование полумарковского потока событий / А. А. Назаров, С. В. Лопухова, И. Р. Гарайшина // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13. – Спецвыпуск 5. – С. 56–62.
53. Назаров А. А. Исследование управляемого несинхронного множественного доступа в спутниковых сетях связи с оповещением о конфликте / Назаров А. А., Шохор С. Л. // Проблемы передачи информации. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 77–89.
54. Назаров А. А. Исследование циклической системы с обслуживанием до полного исчерпания методом «прогулок» / А. А. Назаров Д. М. Сонькин, С. В. Пауль // Научный вестник НГТУ. – 2016. – №4(65). – С. 68–79. – DOI: 10.17212/1814-1196-2016-4-68-79.
55. Назаров А. А., Измайлова Я. Е. Исследование RQ-системы M|E2| 1 с вытеснением заявок и сохранением фазовой реализации обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – №. 42. – С. 72-78.
56. Назаров А. А., Моисеева Е. А. Исследование RQ-системы MMPP| M| 1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2013. – Т. 322. – №. 2. – С. 19-23.
57. Назаров А. А., Судыко Е. А. Условия существования стационарного режима в немарковских RQ-системах с конфликтами заявок // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2011. – Т. 318. – №. 5.

58. Назаров А. А., Черникова Я. Е. Исследование RQ-системы $M|GI|1$ с вытеснением в условии большой задержки // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2013. – Т. 323. – №. 5. – С. 16-20.

59. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы $MMPP|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, № 1. – С. 111–124.

60. Назаров А. А. Исследование RQ-системы $M|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором методом асимптотически-диффузионного анализа / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра, К. С. Шульгина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2021. – № 57. – С. 74–83. – DOI: 10.17223/19988605/57/8.

61. Назаров А.А. Исследование RQ-системы $M|M|1|1$ с вызываемыми заявками методом асимптотически-диффузионного анализа / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2019) : материалы XXII Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 сентября, 2019 г. – Москва, 2019. – С. 148–155.

62. Назаров А.А. Исследование циклической системы с повторными вызовами / А. А. Назаров, С. В. Пауль, П. Н. Ключникова // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2020) : материалы XXIII Международной научной конференции. Москва, 14–18 сентября 2020 г. – Москва, 2020 г. – С. 540-547.

63. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

64. Назаров А. А. Теория массового обслуживания: уч. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.

65. Наумов В. А. О марковских и рациональных потоках случайных событий. I / В. А. Наумов, К. Е. Самуйлов // Информатика и ее применение. – 2020. – Т. 14, В. 3. – С. 13–19.

66. Наумов В. А. О марковских и рациональных потоках случайных событий. I / В. А. Наумов, К. Е. Самуйлов // Информатика и ее применение. – 2020. – Т. 14, В. 4. – С. 37–46.

67. Нежелская Л.А., Першина А.А. Оценивание методом максимального правдоподобия параметра распределения случайного мертвого времени в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 55. С. 53-64.

68. Орлов Ю.Н. Кинетические методы нестационарного анализа надежности связи в беспроводных сетях / Ю.Н. Орлов, Ю.В. Гайдамака, К.Е. Самуйлов. – М.: РУДН. – 2021. 196 с.
69. Пауль С. В. Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок / С. В. Пауль, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 10–15 сентября, 2018 г. – Томск, 2018. – С. 139–145.
70. Пауль С. В. Выходящий поток заявок в системе с прогулками // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015 г. Томск, 2015. – С. 157-162.
71. Пауль С. В. Исследование числа заявок в системе $M|M|1|_{\infty}$ с «прогулками» прибора // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика: материалы XX Всероссийской научно-практической конференции. Томск, 28–29 апреля 2016 г. Томск, 2016. – С. 101-103.
72. Пшеничников А. П., Степанов М. С. Обобщенная модель call-центра //Т-Comm-Телекоммуникации и Транспорт. – 2011. – №. 7. – С. 125-128.
73. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Саати Т.Л. / пер. с англ. Е.Г. Коваленко / под ред. И.Н. Коваленко и Р.Д. Когана. – М: Советское радио, 1965. – 520 с.
74. Самуйлов, К. Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС–7 / К. Е. Самуйлов. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 292 с.
75. Самус М. В., Фомин Л. А., Скоробогатов С. А. Оценка времени корреляции долговременно зависимого трафика //Двойные технологии. – 2009. – №. 4. – С. 39-41.
76. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020666411. Программа для имитации работы системы с повторными обращениями, разнотипными вызываемыми заявками и марковски модулированным входящим потоком / Назаров А. А. (RU), Пауль С. В. (RU), Лизюра О. Д. (RU); правообладатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» (RU). Заявка № 2020665517; дата поступления – 02.12.2020; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 09.12.2020.
77. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020666439. Численная реализация алгоритма получения распределения вероятностей числа заявок на каждой орбите в циклической системе массового обслуживания с повторными вызовами / Назаров А. А. (RU), Пауль С. В. (RU), Лизюра О. Д.

(RU); правообладатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» (RU). Заявка № 2020665512; дата поступления – 02.12.2020; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 09.12.2020.

78. Сонькин М. А. Объектная модель приложения для имитационного моделирования циклических систем массового обслуживания / М. А. Сонькин, А. Н. Моисеев, Д. М. Сонькин, Д. А. Буртовая // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2017. — № 40. — С. 71–79.

79. Степанов, С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами / Степанов С.Н. – М.: Наука, 1983. – 230 с.

80. Судыко Е. А., Назаров А. А. Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №. 3 (12). – С. 97-106.

81. Сущенко С.П. Математические модели компьютерных сетей. Томск: Издательский Дом ТГУ, 2017. 272 с.

82. Татарникова Т. М. Особенности моделирования самоподобного трафика // Региональная информатика и информационная безопасность. – 2017. – С. 151-155.

83. Треногин Н. Г., Соколов Д. Е. Фрактальные свойства сетевого трафика в клиент-серверной информационной системе // Вестник НИИ СУВПТ. – 2003. – №. 1. – С. 163-172.

84. Хинчин А. Я. Потоки случайных событий без последствия / А. Я. Хинчин // Теория вероятностей и ее применения, 1956. Т. 1. № 1. С. 3–18.

85. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. – 120 с.

86. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М: Физмат-лит., 1963. – 236 с.

87. Цициашвили Г. Ш. Инвариантные свойства систем массового обслуживания с несколькими потоками / Г. Ш. Цициашвили. – Дальневосточный математический журнал. – 2018. – Т. 18:2. – С. 267–270.

88. Шварц, М. Сети ЭВМ: Анализ и проектирование. / Шварц М. – М.: Радио и связь, 1981. – 400 с.

89. Шелухин О. И., Антонян А. А. Анализ изменений фрактальных свойств телекоммуникационного трафика вызванных аномальными вторжениями // Т-Comm-Телекоммуникации и Транспорт. – 2014. – Т. 8. – №. 6. – С. 61-64.

90. Шелухин О. И., Осин А. В., Смольский С. М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения. – Физматлит, 2008.
91. Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. – Закрытое акционерное общество Издательство Радиотехника, 2003.
92. Шульгина К.С. Асимптотический анализ RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором / К. С. Шульгина, С. В. Пауль // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. – Томск, – С. 309–314.
93. Aguir S. Karaesmen, F., Akşin, O. Z., Chauvet, F. The impact of retrials on call center performance //OR Spectrum. – 2004. – V. 26. – №. 3. – P. 353-376.
94. Ahn H. S., Duenyas I., Zhang R. Q. Optimal stochastic scheduling of a two-stage tandem queue with parallel servers //Advances in Applied Probability. – 1999. – V. 31. – №. 4. – P. 1095-1117.
95. Aissani A. A retrial queue with redundancy and unreliable server //Queueing systems. – 1994. – V. 17. – №. 3. – P. 431-449.
96. Aissani A. Unreliable queuing with repeated orders //Microelectronics Reliability. – 1993. – V. 33. – №. 14. – P. 2093-2106.
97. Aissani A., Artalejo J. R. On the single server retrial queue subject to breakdowns //Queueing Systems. – 1998. – V. 30. – №. 3. – P. 309-321.
98. Aissani A., Phung-Duc T. Profiting the idleness in single server system with orbit-queue //Proceedings of the 11th EAI International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools. – 2017. – P. 237-243.
99. Altman E., Borovkov A. A. On the stability of retrial queues //Queueing systems. – 1997. – V. 26. – №. 3. – P. 343-363.
100. Anisimov V. V., Atadzhанov K. L. Diffusion approximation of systems with repeated calls and an unreliable server //Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – V. 72. – №. 2. – P. 3032-3034.
101. Artalejo J. R. Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations //Computers & operations research. – 1997. – V. 24. – №. 6. – P. 493-504.
102. Artalejo J. R. New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers //Statistica Neerlandica. – 1994. – V. 48. – №. 1. – P. 23-36.
103. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. Unreliable retrial queues due to service interruptions arising from facsimile networks //JORBEL-Belgian Journal of Operations Research, Statistics, and Computer Science. – 1998. – V. 38. – №. 1. – P. 31-41.

104. Artalejo J. R., Phung-Duc T. Markovian retrial queues with two way communication // *Journal of Industrial & Management Optimization*. – 2012. – V. 8. – №. 4. – P. 781-806.
105. Artalejo J. R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two way communication // *Applied Mathematical Modelling*. – 2013. – V. 37. – №. 4. – P. 1811-1822.
106. Artalejo, J. R. Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrial queue / Artalejo J. R., Chakravarthy S. R. // *Applied Mathematics and Computation*. – 2006. – V. 183. – P. 1399-1409.
107. Artalejo, J. R. Retrial queueing systems: A computational approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral. – Springer, Berlin. – 2008. – 267 p.
108. Artalejo, J. R. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis / Artalejo J.R., Falin G.I. // *Revista Matematica Complutense*. – 2002. – V. 15. – P. 101–129.
109. Artalejo, J.R. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate / Artalejo J.R., Gomez-Corral A., Neuts M.F. // *European Journal of Operational Research*. – 2001. – V. 135. – P. 569–581.
110. Asmussen S. Applied probability and queues / S. Asmussen S. New York, NY, USA: Springer. – 2003. 438 p.
111. Avi-Itzhak B., Yadin M. A sequence of two servers with no intermediate queue // *Management Science*. – 1965. – V. 11. – №. 5. – P. 553-564.
112. Avrachenkov K. Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic / K. Avrachenkov, U. Yechiali // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. – 2008. – T. 22. – №. 4. – P. 519–536.
113. Beran J., Sherman R., Taqqu M. S., Willinger W. Long-range dependence in variable-bit-rate video traffic // *IEEE Transactions on communications*. – 1995. – V. 43. – №. 2/3/4. – P. 1566-1579.
114. Bernett H. G., Fischer M. J., Masi D. M. B. Blended call center performance analysis // *IT professional*. – 2002. – V. 4. – №. 2. – C. 33-38.
115. Bhagat A., Jain M. Unreliable MX/G/1 retrial queue with multi-optional services and impatient customers // *International Journal of Operational Research*. – 2013. – V. 17. – №. 2. – P. 248-273.
116. Blondia C. The N/G/1 finite capacity queue / C. Blondia // *Commun. Stat. Stochastic Models*. – 1989. – Vol. 5, Iss. 2. – P. 273–294.
117. Brandt A., Brandt M. On a two-queue priority system with impatience and its application to a call center // *Methodology and Computing in Applied Probability*. – 1999. – V. 1. – №. 2. – P. 191-210.
118. Brandwajn A., Jow Y. L. L. An approximation method for tandem queues with blocking // *Operations research*. – 1988. – V. 36. – №. 1. – P. 73-83.

119. Buzhin I. Integrity, Resilience and Security of 5G Transport Networks Based on SDN/NFV Technologies / I. Buzhin, M. Bessonov, Y. Mironov, M. P. Farkhadov // *Communications in Computer and Information Science*. – 2021. V. 1552. P. – 123–135.
120. Cappe O., Moulines E., Pesquet J.-C., Petropulu A.P., Yang X. Long-range dependence and heavy-tail modeling for teletraffic data // *IEEE signal processing magazine*. – 2002. – V. 19. – №. 3. – P. 14-27.
121. Carnevali L. Learning Marked Markov Modulated Poisson Processes for Online Predictive Analysis of Attack Scenarios / L. Carnevali, F. Santoni, E. Vicario // *IEEE 30th International Symposium on Software Reliability Engineering (ISSRE)*. 2019. – P. 195–205.
122. Chang F. M., Liu T. H., Ke J. C. On an unreliable-server retrial queue with customer feedback and impatience // *Applied Mathematical Modelling*. – 2018. – V. 55. – P. 171-182.
123. Chen L. Scheduling mix-flows in commodity datacenters with karuna / L. Chen, K. Chen, W. Bai, M. Alizadeh // *In Proceedings of the 2016 ACM SIGCOMM Conference*. – 2016. – P. 174–187.
124. Chirkova J. Equilibrium in a Queueing System with Retrials / J. Chirkova, V. Mazalov, E. Morozov. *Mathematics*. – 2022. – V. 10. – P. 428.
125. Choudhury G., Ke J. C. A batch arrival retrial queue with general retrial times under Bernoulli vacation schedule for unreliable server and delaying repair // *Applied Mathematical Modelling*. – 2012. – V. 36. – №. 1. – P. 255-269.
126. Choudhury G., Ke J. C. An unreliable retrial queue with delaying repair and general retrial times under Bernoulli vacation schedule // *Applied Mathematics and Computation*. – 2014. – V. 230. – P. 436-450.
127. Cinlar E. Markov additive processes / E. Cinlar // *Z. Wahrscheinlichkeit*. – 1972. Iss. 24. – P. 85–93; 95–12.
128. Cohen, J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls / J.W. Cohen // *Philips Telecommunication Review*. – 1957. – V. 18. – № 2. – P. 49– 100.
129. Danilenko A. I., Ryzhikov V. V. On self-similarities of ergodic flows // *Proceedings of the London Mathematical Society*. – 2012. – V. 104. – №. 3. – P. 431-454.
130. Deul, N. Stationary conditions for multi-server queueing systems with repeated calls. / Deul N. // *Electronische Informationsverarbeitung und Kubermetik (Journal of Information processing and Cybernetics)*. – 1980. – V. 18. – № 10. – P. 587–594.
131. Dimitriou I. A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations // *Applied Mathematical Modelling*. – 2013. – V. 37. – №. 3. – P. 1295-1309.

132. Dragieva V. I., Phung-Duc T. A finite-source M/G/1 retrial queue with outgoing calls // *Annals of Operations Research*. – 2020. – V. 293. – №. 1. – P. 101-121.
133. Dragieva V., Phung-Duc T. Two-way communication M/M/1//N retrial queue // *International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*. – Springer, Cham, 2017. – P. 81-94.
134. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. The theory of queuing systems with correlated flows. – Cham: Springer, 2020. – P. 392.
135. Dudin A. Vacation Queueing Model for Performance Evaluation of Multiple Access Information Transmission Systems without Transmission Interruption / A. Dudin, S. Dudin, V. Klimenok, Y. Gaidamaka. – *Mathematics*. – 2021. – V. 9. – P. 1508.
136. Dudin A., Nazarov A. On a tandem queue with retrials and losses and state dependent arrival, service and retrial rates // *International Journal of Operational Research*. – 2017. – V. 29. – №. 2. – P. 170-182.
137. Economou A., Gómez-Corral A., Kanta S. Optimal balking strategies in single-server queues with general service and vacation times // *Performance Evaluation*. – 2011. – V. 68. – №. 10. – P. 967-982.
138. Erlang A. K. The theory of probability and telephone conversations / A. K. Erlang // *Nyt Tidsskrift Mat.* – 1911. – V. 20. – P. 33–39.
139. Falin G. I. On a tandem queue with retrials and losses // *Operational Research*. – 2013. – V. 13. – №. 3. – P. 415-427.
140. Falin G. I., Artalejo J. R., Martin M. On the single server retrial queue with priority customers // *Queueing systems*. – 1993. – V. 14. – №. 3. – P. 439-455.
141. Falin G.I. On ergodicity of multilinear queueing systems with repeated calls. / G.I. Falin // *Soviet Journal of Computer and systems sciences*. 1987. – V. 18. – №. 4. – P. 60–65.
142. Falin G.I. On Sufficient Conditions for Ergodicity of Multichannel Queueing Systems with Repeated Calls / G.I. Falin // *Advanced in Applied Probability*. – 1984. – V. 16. – P. 447–448.
143. Falin, G. I. *Retrial Queues* / G. I. Falin, J. G. C. Tempeton. – London: Chapman and Hall, 1997. – 328 p.
144. Feldmann A., Whitt W. Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models // *Performance evaluation*. – 1998. – V. 31. – №. 3-4. – P. 245-279.
145. Foster, F.C. On the Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Processes / Foster F.C. // *Annals Mathematical Statistic*. – 1953. – V. 24. – P. 355–360.
146. Gandhi, A.; Harchol-Balter, M.; Adan, I. Server farms with setup costs. *Perform. Eval.* 2010, 67, 1123–1138.

147. Gandhi, A.; Doroudi, S.; Harchol-Balter, M.; Scheller-Wolf, A. Exact analysis of the M/M/k/setup class of Markov chains via recursive renewal reward. *ACM Sigmetrics Perform. Eval. Rev.* 2013, 41, 153–166.
148. Gómez-Corral A. A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts // *Operations Research Letters*. – 2002. – V. 30. – №. 6. – P. 360-374.
149. Gudimalla R. K., Kumar, L. R., & Perati, M. R. Loss behaviour analysis of asynchronous internet switch under self-similar traffic input using MMPP/PH/c/K queueing system employing PBS mechanism / R.K. Gudimalla, L.R. Kumar, M.R. Perati // *International Journal of Communication Networks and Distributed Systems*. 2017. – 19(3). – P. 257–269.
150. Haenggi M. User point processes in cellular networks / M. Haenggi // *IEEE Wireless Communications Letters*. 2017. – 6(2). – P. 258–261.
151. Han, X. Cross-layer queueing analysis for aggregated ON–OFF arrivals with adaptive modulation and coding / X. Han, J. Schormans // *IET Communications*. 2016. – 10(17). – P. 2336–2343.
152. Hanschke, T. Explicit formulas for the characteristics of the $M|M|2|2|$ queue with repeated attempts. / Hanschke T. // *Journal of applied probability*. – 1987. – № 24. – P. 486–494.
153. Hida T. On some asymptotic properties of Poisson process / T. Hida // *Nagoya Math. J.* – 1953. – V. 6. – P. 29–36.
154. Hunt G. C. Sequential arrays of waiting lines // *Operations Research*. – 1956. – V. 4. – №. 6. – P. 674-683.
155. Iravani S. M. R., Posner M. J. M., Buzacott J. A. A two-stage tandem queue attended by a moving server with holding and switching costs // *Queueing systems*. – 1997. – V. 26. – №. 3. – P. 203-228.
156. Ke J. C., Chang F. M. Modified vacation policy for M/G/1 retrial queue with balking and feedback // *Computers & Industrial Engineering*. – 2009. – V. 57. – №. 1. – P. 433-443.
157. Kendall D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains / D. G. Kendall. // *Annals of Mathematical Statistics*. – 1953. – Vol. 24. – P. 338–354.
158. Kim C. Analysis of a semi-open queueing network with a state dependent marked Markovian arrival process, customers retrials and impatience / C. Kim, S. Dudin, A. Dudin, K. Samouylov // *Mathematics*. 2019. – 7(8). 715 pp.
159. Kim C. S., Klimenok V., Taramin O. A tandem retrial queueing system with two Markovian flows and reservation of channels // *Computers & operations research*. – 2010. – V. 37. – №. 7. – P. 1238-1246.

160. Kim C. S., Mushko V. V., Dudin A. N. Computation of the steady state distribution for multi-server retrial queues with phase type service process // *Annals of Operations research*. – 2012. – V. 201. – №. 1. – P. 307-323.
161. Kim J., Kim B. A survey of retrial queueing systems // *Annals of operations research*. – 2016. – V. 247. – №. 1. – P. 3-36.
162. Kim, C. S., Park, S. H., Dudin, A., Klimenok, V., Tsarenkov, G. Investigation of the BMAP/G/1 \rightarrow ·/PH/1/M tandem queue with retrials and losses // *Applied Mathematical Modelling*. – 2010. – V. 34. – №. 10. – P. 2926-2940.
163. Kim C. Tandem queueing system with impatient customers as a model of call center with Interactive Voice Response / C. Kim, A. Dudin, S. Dudin, O. Dudina // *Performance Evaluation*. – 2013. – T. 70. – №. 6. – P. 440–453.
164. Kingman J. F.C. On doubly stochastic Poisson process / J. F.C. Kingman // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* – 1964. – V. 60. №4. – P. 923–930.
165. Klimenok V., Savko R. A retrial tandem queue with two types of customers and reservation of channels // *Belarusian Workshop on Queueing Theory*. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. – P. 105-114.
166. Klimenok V.I. Retrial BMAP/PH/N Queueing System with a Threshold-Dependent Inter-Retrial Time Distribution / V.I. Klimenok, A.N.Dudin, V.M.Vishnevsky, O.V. Semenova // *Mathematics*. – 2022. – V. 10. – P. 269.
167. Klimenok V.I. Unreliable Retrial Queueing System with a Backup Server / V.I. Klimenok, A.N.Dudin, O.V. Semenova // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. – 2021. – V.13144. – P. 308–322.
168. Kosten L. On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking / L. Kosten // *De Ingenieur*. – 1947. – V. 59. – №. 1. – P. 1-25.
169. Kuki A., Sztrik J., Tóth Á., Bérczes T. A contribution to modeling two-way communication with retrial queueing systems // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. – Springer, Cham, 2018. – P. 236-247.
170. Kuki, A., Berczes, T., Sztrik, J. & Toth, A. (2019) Reliability analysis of a two-way communication system with searching for customers. 2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT), IEEE. pp. 260–265.
171. Kulkarni V. G., Choi B. D. Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs // *Queueing systems*. – 1990. – V. 7. – №. 2. – P. 191-208.
172. Kumar B. K., Madheswari S. P., Vijayakumar A. The M/G/1 retrial queue with feedback and starting failures // *Applied Mathematical Modelling*. – 2002. – V. 26. – №. 11. – P. 1057-1075.

173. Kumar B. K. Performance analysis of multi-processor two-stage tandem call center retrial queues with non-reliable processors / B. K. Kumar, R. Sankar, R. N. Krishnan, R. Rukmani // *Methodology and Computing in Applied Probability*. – 2021. – P. 1–48.
174. Kumar M. S., Dadlani A., Kim K. Performance analysis of an unreliable M/G/1 retrial queue with two-way communication // *Operational Research*. – 2020. – V. 20. – №. 4. – P. 2267-2280.
175. Le L., Hossain E. Tandem queue models with applications to QoS routing in multihop wireless networks // *IEEE Transactions on Mobile Computing*. – 2008. – V. 7. – №. 8. – P. 1025-1040.
176. Lee G. A new approach to an N/G/1 queue / G. Lee, J. Jeon // *Queueing Syst.* – 2000. – Vol. 35. Iss. 1-4. – P. 317–322.
177. Li H., Yang T. A single-server retrial queue with server vacations and a finite number of input sources // *European Journal of Operational Research*. – 1995. – V. 85. – №. 1. – P. 149-160.
178. Lisovskaya, E.; Fedorova, E.; Salimzyanov, R.; Moiseeva, S. Resource Retrial Queue with Two Orbits and Negative Customers. *Mathematics* 2022, 10, 321.
179. Lucantoni D. New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process / D. Lucantoni // *Stochastic Models*. – 1991. – V. 7. – P. 1–46.
180. Lucantoni D.M. A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes / D. M. Lucantoni, K. S. Meier-Hellsten, M. F. Neuts // *Adv. Appl. Prob.* – 1990. – №22. – P. 676–705.
181. Marczewski E. Remarks on the Poisson stochastic process / E. Marczewski // *Studia Math. Warszawa*, 1953. – V. 13. – № 1. – P. 130–136.
182. Marvi M. On the use of on/off traffic models for Spatio-temporal analysis of wireless networks / M. Marvi, A. Aijaz, M. Khurram // *IEEE Communications Letters*. 2019. – 23(7). – P. 1219–1222.
183. Mehrotra V., Fama J. Call center simulation modeling: methods, challenges, and opportunities // *Proceedings of the 35th conference on Winter simulation: driving innovation*. – 2003. – P. 135-143.
184. Melikov A. Z. Matrix-Geometric Method for the Analysis of a Queuing System with Perishable Inventory / A. Z. Melikov, M. O. Shahmaliyev, S. S. Nair. *Automation and Remote Control*. – 2022. – V. 82. – P. 2169–2182.
185. Moiseev A. Discrete-event approach to simulation of queueing networks / A. Moiseev, A. Demin, V. Dorofeev, V. Sorokin // *Key Engineering Materials / Trans Tech Publ.* – Vol. 685. – 2016. – Pp. 939–942.

186. Moreno P. A discrete-time retrial queue with unreliable server and general server lifetime // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2006. – V. 132. – №. 5. – P. 643-655.
187. Morozov E., Phung-Duc T. Regenerative analysis of two-way communication orbit-queue with general service time // *International Conference on Queueing Theory and Network Applications*. – Springer, Cham, 2018. – P. 22-32.
188. Morozov E. Sensitivity Analysis and Simulation of a Multiserver Queueing System with Mixed Service Time Distribution / E. Morozov, M. Pagano, I. Peshkova A. Rumyantsev. *Mathematics*. – 2020. – V. 8. – P. 1277.
189. Moutzoukis E., Langaris C. Non-preemptive priorities and vacations in a multiclass retrial queueing system // *Stochastic Models*. – 1996. – V. 12. – №. 3. – P. 455-472.
190. Moutzoukis E., Langaris C. Two queues in tandem with retrial customers // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. – 2001. – V. 15. – №. 3. – P. 311-325.
191. Nakamura A. Queueing analysis of a Car/Ride-Share system / A. Nakamura, T. Phung-Duc, H. Ando. *Annals of Operations Research*. – 2022. – V. 310. – P. 661–682.
192. Nazarov A. A. Analysis of the Amount of Information in Semi-Markov Flow / A. Nazarov, A. Moiseev, I Lapatin, S. Paul, O. Lizyura, P. Pristupa, X. Peng, L. Chen, B. Bai // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь. DCCN-2021 : материалы XXIV Международной научной конференции, Москва, 20–24 сентября 2021 г. – Москва, 2021. – С. 143–147.*
193. Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Multiserver Retrial Queue with Two-Way Communication / A. A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. V. Paul, O. D. Lizura // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2020) : материалы XXIII Международной научной конференции. Москва, 14–18 сентября 2020 г. – Москва, 2020 г. – С. 531–539.*
194. Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Renewal Input / A. A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. V. Paul, O. D. Lizura // *Пятая Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-5) : материалы Международной научной конференции. Москва, 23–27 ноября 2020 г. – Москва, 2020 г. – С. 339–345.*
195. Nazarov A. A. Scaling limits of a tandem retrial queue with common orbit and Poisson arrival process / A. A. Nazarov, S.V. Paul, T. Phung-Duc, M. A. Morozova // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь. DCCN-2021 : материалы XXIV Международной научной конференции, Москва, 20–24 сентября 2021 г. – Москва, 2021. – С. 315–321.*

196. Nazarov A. Asymptotic analysis of markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrial condition / A. Nazarov, S. Paul, I. Gudkova // 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2017. – 2017 : proceedings. Budapest. Hungary, May 23–26, 2017. – P. 687–693.

197. Nazarov A. Analysis of Tandem Retrial Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, S Paul, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2021. – Vol. 13104 : 17th European Performance Engineering Workshop, EPEW 2021, and the 26th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications, ASMATA 2021. Virtual, Online, December 13–14, 2021. – P. 441–456.

198. Nazarov A. Asymptotic Analysis of M/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication / A. Nazarov, S. Paul // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017) : материалы Двадцатой международной научной конференции. Москва, 25–29 сентября 2017 г. – Москва, 2017. – С. 575-582.

199. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, S. Paul, O. Lizura // Global and Stochastic Analysis. – 2021. – Vol. 8, № 3. – P. 143–149.

200. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian Retrial Queue with Unreliable Server and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, S. Paul, O. Lizura // Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики : тезисы докладов конференции, Карши, 25 сентября 2020 г. – Карши, 2020 г. – С. 40–41.

201. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and two-way communication under low rate of retrials condition / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul, O. Lizyura, K. Shulgina // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020) : материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 2–5 декабря 2020 г. – Томск, 2021. – С. 99–104.

202. Nazarov A. Asymptotic Diffusion Analysis of Multi-Server Retrial Queue with Hyper-Exponential Service / A. Nazarov, A. Moiseev, S. Paul // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 531-1–531-16. – DOI: 10.3390/math8040531.

203. Nazarov A. Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul, O. Lizura // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2019. – Vol. 11965 : 22nd International Conference on Distributed and Computer and Communication Networks, DCCN 2019. Moscow. Russia, September 23–27, 2019. – 2019. – P. 207–222.

204. Nazarov A. Central Limit Theorem for an M/M/1/1 Retrial Queue with Unreliable Server and Two-Way Communication / A. Nazarov, S. Paul, O. Lizura, K. Shulgina // *Communications in Computer and Information Science*. – 2021. – Vol. 1391 : 19th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2020. Virtual, Online, December 2–5, 2020. – P. 120–130.

205. Nazarov A. Diffusion Approximation for Multiserver Retrial Queue with Two-Way Communication / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul, O. Lizura // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. – 2020. – Vol. 12563 : 23rd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2020. Moscow. Russia, September 14–18, 2020. – P. 567–578.

206. Nazarov A. Diffusion Limit for Single-Server Retrial Queues with Renewal Input and Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul, O. Lizura // *Mathematics*. – 2022. – Vol. 10, № 948. – DOI: 10.3390/math10060948. (*Web of Science*).

207. Nazarov A. Diffusion Limit of Multi-Server Retrial Queue with Setup Time / A. Nazarov, A. Moiseev, T. Phung-Duc, S. Paul // *Mathematics*. – 2020. – Vol. 8, № 12. P. 2232. – DOI: 10.3390/math8122232.

208. Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul // *Communications in Computer and Information Science*. – 2017. – Vol. 800 : 16th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2017. Kazan. Russia, September 29 – October 3, 2017. – P. 28–41.

209. Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, S. Paul, O. Lizura // *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. – 2019. – Vol. 27, № 1. – P. 5–2.

210. Nazarov, A.; Moiseev, A.; Moiseeva, S. Mathematical Model of Call Center in the Form of Multi-Server Queueing System. *Mathematics* 2021, 9, 2877.

211. Nazarov A. Mathematical Model of Scheduler with Semi-Markov Input and Bandwidth Sharing Discipline / A. Nazarov, A. Moiseev, I Lapatin, S. Paul, O. Lizyura, P. Pristupa, X. Peng, L. Chen, B. Bai // 2021 International Conference on Information Technology, ICIT. – 2021. – Vol. 1–2 : proceedings, IEEE. Amman. Jordan, July 14-15, 2021. – P. 494–498.

212. Nazarov A. Method of asymptotic diffusion analysis of queueing system M|M|N with feedback / A. Nazarov, S. Paul, E. Pavlova // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. – 2020. – Vol. 12023 : 25th International Conference on Analytical and

Stochastic Modelling Techniques and Applications, ASMTA 2019. Moscow. Russia, October 21–25, 2019. – P. 131-143.

213. Nazarov A. Multi-level MMPP as a Model of Fractal Traffic / A. Nazarov, A. Moiseev, I. Lapatin, S. Paul, O. Lizyura, P. Pristupa, Xi Peng, Li Chen, Bo Bai // Communications in Computer and Information Science. – 2021. – Vol. 1391 : 19th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2020. Virtual, Online, December 2–5, 2020. – P. 61–77.

214. Nazarov A. Scaling Limits of a Tandem Retrial Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, S Paul, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2021. – Vol. 13144 : 24th International Conference on Distributed and Computer and Communication Networks, DCCN 2021. Moscow. Russia, September 20–24, 2021. – P. 240–250.

215. Nazarov A. Semi-markov Resource Flow as a Bit-Level Model of Traffic / A. Nazarov, A. Moiseev, I. Lapatin, S. Paul, O. Lizyura, P. Pristupa, Xi Peng, Li Chen, Bo Bai // Communications in Computer and Information Science. – 2022. – Vol. 1552 : 24th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2021. Virtual, Online, September 20–24, 2021. – P. 220–232.

216. Nazarov A. Single Server Queues with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul, O. Lizyura // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1109 : 18th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2019. Saratov. Russia, June 26–30, 2019. – P. 213–224.

217. Nazarov A. Slow Retrial Asymptotics for a Single Server Queue with Two-Way Communication and Markov Modulated Poisson Input / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul // Journal of Systems Science and Systems Engineering. – 2019. – Vol. 28, № 2. – P. 181–193.

218. Nazarov A. Unreliable single-server queue with two-way communication and retrials of blocked and interrupted calls for cognitive radio networks / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 919 : 21st International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2018. Moscow. Russia, September 17–21, 2018. – P. 276–287.

219. Nazarov A., Sztrik J., Kvach A. A survey of recent results in finite-source retrial queues with collisions // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – V. 912. – P. 1-15.

220. Nazarov A., Sztrik J., Kvach A. Asymptotic sojourn time analysis of finite-source M/M/1 retrial queuing system with two-way communication // *Information technologies and mathematical modelling. Queueing theory and applications.* – Springer, Cham, 2018. – P. 172-183.
221. Nazarov A.A. Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls / A. A. Nazarov, S. V. Paul, O. D. Lizura // *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science.* – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 49–61.
222. Neuts M. F. A versatile Markovian point process / M. F. Neuts // *J. Appl. Probab.* – 1979. – Vol. 16., Iss. 4. – P. 764–779.
223. Neuts M. F. A versatile Markovian point process / M. F. Neuts. – Newark, DE, USA: Department of Statistics and Computer Science, University of Delaware, 1977. Technical Report 77/13. 29 p.
224. Neuts M. F. Two queues in series with a finite, intermediate waiting room // *Journal of Applied Probability.* – 1968. – V. 5. – №. 1. – P. 123-142.
225. Nisida T. On some probability distributions concerning Poisson process / T. Nisida // *Math. Japan*, 1953. – V. 3. – P. 7–12.
226. Ong K. L., Taaffe M. R. Nonstationary queues with Interrupted Poisson arrivals and unreliable/repairable servers // *Queueing Systems.* – 1989. – V. 4. – №. 1. – P. 27-46.
227. Palm C. The Distribution of Repairmen in Servicing Automatic Machines / C. Palm // *Industritidningen Norden.* –1947. – Vol. 75. – P. 75–80, 90–94, 119–123.
228. Paul S. Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks / S. Paul, T. Phung-Duc // *Communications in Computer and Information Science.* – 2018. – Vol. 912 : 17th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2018 and 12th Workshop on Retrial Queues and Related Topics, WRQ 2018. Tomsk. Russia, September 10–15, 2018. – P. 213–224.
229. Paul S. Retrial queueing model with two-way communication, unreliable server and resume of interrupted call for cognitive radio networks / S. Paul, T. Phung-Duc // *12th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics.* Tomsk, 10–15 September, 2018. – Tomsk, 2018. – P. 28–29.
230. Perros H. G. A bibliography of papers on queueing networks with finite capacity queues // *Performance Evaluation.* – 1989. – T. 10. – №. 3. – C. 255-260.
231. Phung-Duc T. An explicit solution for a tandem queue with retrials and losses // *Operational Research.* – 2012. – V. 12. – №. 2. – P. 189-207.

232. Phung-Duc T., Masuyama H., Kasahara S., Takahashi Yu. A matrix continued fraction approach to multiserver retrial queues // *Annals of Operations Research*. – 2013. – V. 202. – №. 1. – P. 161-183.
233. Phung-Duc, T., Ren, Y., Chen, J.C., Yu, Z.W. Design and analysis of deadline and budget constrained autoscaling (DBCA) algorithm for 5G mobile networks. In *Proceedings of the 2016 IEEE international conference on cloud computing technology and science (CloudCom)*, Luxembourg, 12–15 December 2016; pp. 94–101.
234. Phung-Duc T., Masuyama H., Kasahara S., Takahashi Yu. M/m/3/3 and m/m/4/4 retrial queues // *Journal of Industrial & Management Optimization*. – 2009. – V. 5. – №. 3. – P. 431-451.
235. Phung-Duc T., Masuyama H., Kasahara S., Takahashi Yu. State-dependent M/M/c/c+ r retrial queues with Bernoulli abandonment // *Journal of Industrial & Management Optimization*. – 2010. – T. 6. – №. 3. – P. 517-540.
236. Prabhu N. U. Transient behaviour of a tandem queue // *Management Science*. – 1967. – V. 13. – №. 9. – P. 631-639.
237. Pristupa P.V., Mikheev P.A., Suschenko S.P. Performance of Forward Error Correction in Transport Protocol at Intra-segment Level // *CCIS*. 2020. Vol. 1337. P. 546-556.
238. Ramaswami V. The N/G/1 queue and its detailed analysis / V. Ramaswami // *Adv. Appl. Probab.* – 1980. – Vol. 12. Iss. 1. – P. 222–261.
239. Ren Y., Phung-Duc T., Chen, J.C., Yu, Z.W. Dynamic auto scaling algorithm (dasa) for 5g mobile networks. In *Proceedings of the 2016 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, Washington, DC, USA, 4–8 December 2016; pp. 1–6.
240. Rykov V. On reliability function of a k-out-of-n system with general repair time distribution / V. Rykov, D. Kozyrev A. Filimonov, N. Ivanova // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. – 2021. – V. 35, №4. – P. 885–902.
241. Saito H. The departure process of an N/G/1 queue / H. Saito // *Perform. Evaluation*. – 1990. – Vol. 11. Iss. 4. – P. 241–251.
242. Sakurai H., Phung-Duc T. Scaling limits for single server retrial queues with two-way communication // *Annals of Operations Research*. – 2016. – V. 247. – №. 1. – P. 229-256.
243. Selvaraju N., Goswami C. Impatient customers in an M/M/1 queue with single and multiple working vacations // *Computers & Industrial Engineering*. – 2013. – V. 65. – №. 2. – P. 207-215.
244. Sennot, L.I. Mean drifts and the non-ergodicity of markov chains / Sennot L.I., Humblet P.A., Tweedie R.L. // *Operations research*. – 1983. – № 31 (4). – P. 783–789.

245. Shajin D. On a queueing-inventory system with common life time and Markovian lead time process / D. Shajin, A. Krishnamoorthy, R. Manikandan. *Operation Research*. – 2022. – V. 22. P. 651–684.
246. Suzuki T. Ergodicity of a tandem queue with blocking // *Journal of the OR Society of Japan*. – 1964. – V. 7. – №. 2 – P. 68-75.
247. Suzuki T. On a tandem queue with blocking // *J. Operat. Res. Soc. Japan*. – 1964. – V. 6. – P. 137-157.
248. Sztrik J., Tóth A., Pintér A., Bács Z. The simulation of finite-source retrial queueing systems with two-way communications to the orbit and blocking // *International Conference on Distributed Computer and Communication Networks*. – Springer, Cham, 2020. – P. 171-182.
249. Sztrik J., Tóth A., Pintér A., Bács Z. The Simulation of Finite-Source Retrial Queueing Systems with Two-Way Communication and Impatient Customers // *International Conference on Distributed Computer and Communication Networks*. – Springer, Cham, 2021. – P. 117-127.
250. Tikhonenko O. Unreliable Single-Server Queueing System with Customers of Random Capacity / O. Tikhonenko, M. Ziółkowski // *Communications in Computer and Information Science*. – 2020. – V. 1231. – P 153-170.
251. Tóth, Á. Analysis of Two-Way Communication Retrial Queueing Systems with Non-reliable Server, Impatient Customers to the Orbit and Blocking Using Simulation / A. Tóth, J. Sztrik, T. Bérczes, A. Kuki, // *Communications in Computer and Information Science*. – 2022. – V. 1552. – P. 174–185.
252. Van Leeuwen J. S. H., Resing J. A. C. A tandem queue with coupled processors: computational issues // *Queueing Systems*. – 2005. – V. 51. – №. 1. – P. 29-52.
253. Vinod B. Unreliable queueing systems // *Computers & operations research*. – 1985. – V. 12. – №. 3. – P. 323-340.
254. Vinod B., Altiok T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // *Journal of the Operational Research Society*. – 1986. – V. 37. – №. 3. – P. 309-316.
255. Voytishek A. V. Classification and Applications of Randomized Functional Numerical Algorithms for the Solution of Second-Kind Fredholm Integral Equations / A.V. Voytishek. – *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. – 2021. – V. 254, № 5. – P. 589-605.
256. Wang J., Cao J., Li Q. Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs // *Queueing Systems*. – 2001. – V. 38. – №. 4. – P. 363-380.

257. Wang J., Zhang P. A discrete-time retrial queue with negative customers and unreliable server // *Computers & Industrial Engineering*. – 2009. – V. 56. – №. 4. – P. 1216-1222.
258. Wilkinson, R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA / R.I. Wilkinson // *The Bell System Technical Journal*. – 1956. – V. 35. – № 2. – P. 421–507.
259. Wu X. et al. An M/G/1 retrial queue with balking and retrials during service // *International Journal of Operational Research*. – 2005. – V. 1. – №. 1-2. – P. 30-51.
260. Xu, H., Farajtabar, M., & Zha, H. Learning granger causality for Hawkes processes / H. Xu, H., M. Farajtabar, H. Zha // In *International conference on machine learning*. 2016. P. 1717–1726.
261. Yang T., Li H. The M/G/1 retrial queue with the server subject to starting failures // *Queueing Systems*. – 1994. – V. 16. – №. 1. – P. 83-96.
262. Yang T., Templeton J. G. C. A survey on retrial queues // *Queueing systems*. – 1987. – V. 2. – №. 3. – P. 201-233.
263. Zipkin J. R. Point-process models of social network interactions: Parameter estimation and missing data recovery/ J. R. Zipkin, F. P. Schoenberg, K. Coronges, A. L. Bertozzi // *European journal of applied mathematics*. 2016. – 27(3). P. 502–529.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. **Лопухова С. В.** Исследование MAP-потока методом асимптотического анализа N-го порядка / С. В. Лопухова, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Серия Информатика. Кибернетика. Математика. – 2006. – № 293. – С. 110–115.

2. Назаров А. А. Исследование полумарковского потока событий / А. А. Назаров, **С. В. Лопухова**, И. Р. Гарайшина // Вычислительные технологии. – 2008. – Т 13. – Спецвыпуск 5. – С. 56–62.

3. Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2019. – Vol. 27, № 1. – P. 5–2.

4. Nazarov A. Slow Retrial Asymptotics for a Single Server Queue with Two-Way Communication and Markov Modulated Poisson Input / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul** // Journal of Systems Science and Systems Engineering. – 2019. – Vol. 28, № 2. – P. 181–193. (*Web of Science*).

5. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 48. – С. 13–20. – DOI: 10.17223/19988605/48/2.

Web of Science: Nazarov A.A. Asymptotic analysis of retrial queue with n types of outgoing calls under low rate of retrials condition / A. A. Nazarov, **S. V. Paul**, O. D. Lizura // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta-Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika. – 2019. – № 48. – P. 13–20.

6. Nazarov A. Asymptotic Diffusion Analysis of Multi-Server Retrial Queue with Hyper-Exponential Service / A. Nazarov, A. Moiseev, **S. Paul** // *Mathematics*. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 531-1–531-16. – DOI: 10.3390/math8040531. (*Web of Science*).

7. Nazarov A. Diffusion Limit of Multi-Server Retrial Queue with Setup Time / A. Nazarov, A. Moiseev, T. Phung-Duc, **S. Paul** // *Mathematics*. – 2020. – Vol. 8, № 12. P. 2232. – DOI: 10.3390/math8122232. (*Web of Science*).

8. Nazarov A.A. Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls / A. A. Nazarov, **S. V. Paul**, O. D. Lizura // *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 49–61.

9. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2021. – Т. 21, № 1. – С. 111–124.

Web of Science: Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP|M|1 retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura // *Izvestiya Saratovskogo universiteta Novaya seriya-Matematika Mekhanika Informatika*. – 2021. – Vol. 21, № 1. – P. 111–124. – DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124.

10. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura // *Global and Stochastic Analysis*. – 2021. – Vol. 8, № 3. – P. 143–149. (*Scopus*).

11. Назаров А. А. Исследование RQ-системы M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором методом асимптотически-диффузионного анализа / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра, К. С. Шульгина // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2021. – № 57. – С. 74–83. – DOI: 10.17223/19988605/57/8.

Web of Science: Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Unreliable Server / A. A. Nazarov, **S. V. Paul**,

O. D. Lizura, K. S. Shulgina // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta-Up-
ravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika. – 2021. – № 57. – P. 74–83.

12. Nazarov A. Diffusion Limit for Single-Server Retrial Queues with Renewal
Input and Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Mathematics.
– 2022. – Vol. 10, № 948. – DOI: 10.3390/math10060948. (*Web of Science*).

*Статьи в сборниках материалов конференций, представленных в изданиях,
входящих в Web of Science и Scopus:*

13. Nazarov A., Paul S., Gudkova I. Asymptotic analysis of markovian retrial
queue with two-way communication under low rate of retrial condition / A. Nazarov,
S. Paul, I. Gudkova // 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS
2017. – 2017 : proceedings. Budapest. Hungary, May 23–26, 2017. – P. 687–693. – DOI:
10.7148/2017-0687. (*Web of Science*).

14. Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue
with two-way communication / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul** // Communications
in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 800 : 16th International Conference
on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2017. Kazan. Russia,
September 29 – October 3, 2017. – P. 28–41. – DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_3.
(*Scopus*).

15. Paul S. Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable
Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks / **S. Paul**, T. Phung-
Duc // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912 : 17th
International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling,
ITMM 2018 and 12th Workshop on Retrial Queues and Related Topics, WRQ 2018.
Tomsk. Russia, September 10–15, 2018. – P. 213–224. – DOI: 10.1007/978-3-319-
97595-5_17. (*Scopus*).

16. Nazarov A. Unreliable single-server queue with two-way communication and
retrials of blocked and interrupted calls for cognitive radio networks / A. Nazarov,
T. Phung-Duc, **S. Paul** // Communications in Computer and Information Science. – 2018.
– Vol. 919 : 21st International Conference on Distributed Computer and Communication

Networks, DCCN 2018. Moscow. Russia, September 17–21, 2018. – P. 276–287. – DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5_24. (*Scopus*).

17. Nazarov A. Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2019. – Vol. 11965 : 22nd International Conference on Distributed and Computer and Communication Networks, DCCN 2019. Moscow. Russia, September 23–27, 2019. – 2019. – P. 207–222. – DOI: 10.1007/978-3-030-36614-8_16. (*Scopus*).

18. Nazarov A. Method of asymptotic diffusion analysis of queueing system M|M|N with feedback / A. Nazarov, **S. Paul**, E. Pavlova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2020. – Vol. 12023 : 25th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications, ASMTA 2019. Moscow. Russia, October 21–25, 2019. – P. 131–143. – DOI: 10.1007/978-3-030-62885-7_10. (*Scopus*).

19. Nazarov A. Single Server Queues with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1109 : 18th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2019. Saratov. Russia, June 26–30, 2019. – P. 213–224. – DOI: 10.1007/978-3-030-33388-1_15. (*Scopus*).

20. Nazarov A. Central Limit Theorem for an M/M/1/1 Retrial Queue with Unreliable Server and Two-Way Communication / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura, K. Shulgina // Communications in Computer and Information Science. – 2021. – Vol. 1391 : 19th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2020. Virtual, Online, December 2–5, 2020. – P. 120–130. DOI: 10.1007/978-3-030-72247-0_9. (*Scopus*).

21. Nazarov A. Diffusion Approximation for Multiserver Retrial Queue with Two-Way Communication / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2020. – Vol. 12563 : 23rd International Conference on

Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2020. Moscow. Russia, September 14–18, 2020. – P. 567–578. – DOI: 10.1007/978-3-030-66471-8_43. (*Scopus*).

22. Nazarov A. Multi-level MMPP as a Model of Fractal Traffic / A. Nazarov, A. Moiseev, I. Lapatin, **S. Paul**, O. Lizyura, P. Pristupa, Xi Peng, Li Chen, Bo Bai // Communications in Computer and Information Science. – 2021. – Vol. 1391 : 19th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling, ITMM 2020. Virtual, Online, December 2–5, 2020. – P. 61–77. – DOI: 10.1007/978-3-030-72247-0_5. (*Scopus*).

23. Nazarov A. Mathematical Model of Scheduler with Semi-Markov Input and Bandwidth Sharing Discipline / A. Nazarov, A. Moiseev, I Lapatin, **S. Paul**, O. Lizyura, P. Pristupa, X. Peng, L. Chen, B. Bai // 2021 International Conference on Information Technology, ICIT. – 2021. – Vol. 1–2 : proceedings, IEEE. Amman. Jordan, July 14-15, 2021. – P. 494–498. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9491748>. (*Web of Science*).

24. Nazarov A. Analysis of Tandem Retrieval Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, **S Paul**, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2021. – Vol. 13104 : 17th European Performance Engineering Workshop, EPEW 2021, and the 26th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications, ASMTA 2021. Virtual, Online, December 13–14, 2021. – P. 441–456. – DOI: 10.1007/978-3-030-91825-5_27. (*Scopus*).

25. Nazarov A. Scaling Limits of a Tandem Retrieval Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, **S Paul**, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2021. – Vol. 13144 : 24th International Conference on Distributed and Computer and Communication Networks, DCCN 2021. Moscow. Russia, September 20–24, 2021. – P. 240–250. – DOI: 10.1007/978-3-030-92507-9_20. (*Scopus*).

26. Nazarov A. Semi-markov Resource Flow as a Bit-Level Model of Traffic / A. Nazarov, A. Moiseev, I. Lapatin, **S. Paul**, O. Lizyura, P. Pristupa, Xi Peng, Li Chen, Bo Bai // *Communications in Computer and Information Science*. – 2022. – Vol. 1552 : 24th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2021. Virtual, Online, September 20–24, 2021. – P. 220–232. – DOI: 10.1007/978-3-030-97110-6_17. (*Scopus*).

Публикации в прочих научных изданиях:

27. Назаров А. А. Исследование BSMP-потока / А. А. Назаров, С. В. Пауль // материалы Международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения». Москва, 2012. – С. 202.

28. Лопухова С. В. Исследование MMP-потока асимптотическим методом m -го порядка // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2008. – № 3(4). – С. 71–76.

29. **Пауль С. В.** Выходящий поток заявок в системе с прогулками // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015 г. Томск, 2015. – С. 157–162.

30. **Пауль С. В.** Исследование числа заявок в системе $M|M|1|_\infty$ с «прогулками» прибора // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика: материалы XX Всероссийской научно-практической конференции. Томск, 28–29 апреля 2016 г. Томск, 2016. – С. 101–103.

31. Назаров А. А. Исследование выходящего потока заявок в системе с прогулками прибора / А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Алтай, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – С. 102–107.

32. Nazarov A. Asymptotic Analysis of M/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication / A. Nazarov, **S. Paul** // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017)* : материалы

Двадцатой международной научной конференции. Москва, 25–29 сентября 2017 г. – Москва, 2017. – С. 575–582.

33. Назаров А. А. Исследование выходящего потока в RQ-системе M/M/1/1 с вызываемыми заявками / А. А. Назаров, И. Л. Лапатин, **С. В. Пауль** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 3 октября 2017 г. – Томск, 2017. – С. 150–154.

34. Назаров А. А. Исследование RQ-системы MMPP/M/1/1 с вызываемыми заявками асимптотическим методом / А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 3 октября 2017 г. – Томск, 2017. – С. 314–321.

35. **Paul S.** Retrial queueing model with two-way communication, unreliable server and resume of interrupted call for cognitive radio networks / **S. Paul**, T. Phung-Duc // 12th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics. Tomsk, 10–15 September, 2018. – Tomsk, 2018. – P. 28–29.

36. **Пауль С. В.** Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок / **С. В. Пауль**, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 10–15 сентября, 2018 г. – Томск, 2018. – С. 139–145.

37. Назаров А. А. Исследование RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и обслуживанием заново прерванных заявок / А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2018) : материалы XXI Международной научной конференции. Москва, 17–21 сентября, 2018 г. – Москва, 2018. – С. 253–260.

38. Лизюра О.Д. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в условии предельно редких изменений состояний входя-

щего потока / О. Д. Лизюра, А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Международной молодежной научной конференции. Томск, 23–25 мая, 2019 г. – Томск, 2019. – С. 241–246.

39. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы $MPP|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. – Томск, 2019. – С. 239–244.

40. Назаров А. А. RQ-система с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. – Томск, 2019. – С. 245–249.

41. Назаров А.А. Исследование RQ-системы $M|M|1|1$ с вызываемыми заявками методом асимптотически-диффузионного анализа / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2019) : материалы XXII Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 сентября, 2019 г. – Москва, 2019. – С. 148–155.

42. Морозова М. А. Модели телекоммуникационных систем связи в виде систем с повторными вызовами и вызываемыми заявками / М. А. Морозова, **С. В. Пауль**, А. А. Назаров // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. – Томск, – С. 277–284.

43. Шульгина К.С. Асимптотический анализ RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором / К. С. Шульгина, **С. В. Пауль** // Математическое

и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. – Томск, – С. 309–314.

44. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian Retrial Queue with Unreliable Server and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura // Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики : тезисы докладов конференции, Карши, 25 сентября 2020 г. – Карши, 2020 г. – С. 40–41.

45. Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Multiserver Retrial Queue with Two-Way Communication / A. A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. V. Paul**, O. D. Lizura // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2020) : материалы XXIII Международной научной конференции. Москва, 14–18 сентября 2020 г. – Москва, 2020 г. – С. 531–539.

46. Назаров А.А. Исследование циклической системы с повторными вызовами / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, П. Н. Ключникова // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2020) : материалы XXIII Международной научной конференции. Москва, 14–18 сентября 2020 г. – Москва, 2020 г. – С. 540-547.

47. Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Renewal Input / A. A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. V. Paul**, O. D. Lizura // Пятая Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-5) : материалы Международной научной конференции. Москва, 23–27 ноября 2020 г. – Москва, 2020 г. – С. 339–345.

48. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and two-way communication under low rate of retrials condition / A. Nazarov, T. Phung-Duc, S. Paul, O. Lizyura, K. Shulgina // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020) : материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 2–5 декабря 2020 г. – Томск, 2021. –С. 99–104.

49. Nazarov A. A. Analysis of the Amount of Information in Semi-Markov Flow / A. Nazarov, A. Moiseev, I Lapatin, **S. Paul**, O. Lizyura, P. Pristupa, X. Peng, L. Chen,

V. Bai // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь. DCCN-2021 : материалы XXIV Международной научной конференции, Москва, 20–24 сентября 2021 г. – Москва, 2021. – С. 143–147.

50. Nazarov A. A. Scaling limits of a tandem retrial queue with common orbit and Poisson arrival process / A. A. Nazarov, **S.V. Paul**, T. Phung-Duc, M. A. Morozova // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь. DCCN-2021 : материалы XXIV Международной научной конференции, Москва, 20–24 сентября 2021 г. – Москва, 2021. – С. 315–321.

51. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020666411. Программа для имитации работы системы с повторными обращениями, разнотипными вызываемыми заявками и марковски модулированным входящим потоком / Назаров А. А. (RU), **Пауль С. В.** (RU), Лизюра О. Д. (RU); правообладатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» (RU). Заявка № 2020665517; дата поступления – 02.12.2020; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 09.12.2020.

52. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020666439. Численная реализация алгоритма получения распределения вероятностей числа заявок на каждой орбите в циклической системе массового обслуживания с повторными вызовами / Назаров А. А. (RU), **Пауль С. В.** (RU), Лизюра О. Д. (RU); правообладатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» (RU). Заявка № 2020665512; дата поступления – 02.12.2020; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 09.12.2020.