

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



Тумашкина Диана Александровна

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ, ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ  
И ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ  
СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук, доцент  
Нежельская Людмила Алексеевна

Томск – 2021

## Оглавление

Введение .....	5
1 Математическая модель полусинхронного потока событий второго порядка.....	19
1.1 Математическое описание потока при его полной наблюдаемости .....	19
1.2 Математическое описание потока при его частичной наблюдаемости.....	21
1.3 Некоторые свойства потока .....	22
1.4 Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ .....	26
1.5 Выводы и результаты по первой главе .....	29
2 Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка.....	30
2.1 Оптимальная оценка состояний потока при его полной наблюдаемости .....	30
2.1.1 Вид рекуррентного соотношения для апостериорных вероятностей .....	31
2.1.2 Получение формулы пересчета для апостериорных вероятностей .....	36
2.1.3 Вид апостериорной вероятности состояния потока при его полной наблюдаемости .....	40
2.1.4 Нахождение явных выражений для априорных вероятностей .....	44
2.1.5 Алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его полной наблюдаемости .....	49
2.2 Оптимальная оценка состояний потока при его частичной наблюдаемости.....	50
2.2.1 Вид апостериорной вероятности состояния потока при его частичной наблюдаемости .....	52
2.2.2 Алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его частичной наблюдаемости.....	55
2.3 Выводы и результаты по второй главе .....	56

3	Оценивание параметров плотности распределения вероятностей и длительности мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка методом моментов .....	58
3.1	Оценка параметров плотности распределения вероятностей.....	58
3.1.1	Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке для общего случая задания параметров.....	59
3.1.2	Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке для особого случая задания параметров.....	65
3.1.3	Оценка параметров плотности вероятности для общего случая .....	68
3.1.4	Оценка параметров плотности вероятности для особого случая .....	71
3.2	Оценка параметров плотности распределения вероятностей в рекуррентном потоке .....	75
3.2.1	Вид совместной плотности вероятности длительностей интервалов между соседними событиями в потоке для общего случая задания параметров .....	76
3.2.2	Вид совместной плотности вероятности длительностей интервалов между соседними событиями в потоке для особого случая задания параметров.....	78
3.2.3	Условия рекуррентности потока для общего случая задания параметров.....	80
3.2.4	Условия рекуррентности потока для особого случая задания параметров.....	81
3.2.5	Оценка параметров плотности в рекуррентном потоке для общего случая .....	82
3.2.6	Оценка параметров плотности в рекуррентном потоке для особого случая .....	84
3.3	Оценка длительности мертвого времени в наблюдаемом потоке .....	86
3.3.1	Вывод плотности вероятности $p_T(\tau)$ .....	86
3.3.2	Оценивание длительности мертвого времени методом моментов .....	89
3.3.3	Среднее число потерянных событий в единицу времени .....	91

3.4 Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном наблюдаемом потоке .....	92
3.4.1 Вывод совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ .....	92
3.4.2 Условия рекуррентности полусинхронного потока событий второго порядка при наличии мертвого времени.....	95
3.4.3 Оценивание длительности мертвого времени в рекуррентном наблюдаемом потоке методом моментов .....	96
3.4.4 Вероятностные характеристики потока .....	97
3.5 Выводы и результаты по третьей главе .....	98
4 Результаты численных экспериментов на имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка .....	100
4.1 Проверка работоспособности модели .....	100
4.2 Проверка качества оценки состояний потока .....	107
4.3 Проверка качества оценки параметров плотности распределения .....	115
4.4 Проверка качества оценки длительности мертвого времени.....	127
4.5 Выводы и результаты по четвертой главе.....	131
Заключение .....	132
Список использованной литературы.....	134
Приложение А Имитационное моделирование .....	149
Приложение Б Блок-схема имитационной модели .....	151
Приложение В Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ .....	154

## Введение

**Актуальность темы исследования.** В настоящее время при описании и анализе реальных технических, физических, телекоммуникационных и других систем возникает необходимость применять математический аппарат теории массового обслуживания (ТМО) [17, 43–45, 77, 83, 84, 91–93, 103, 119, 121, 122], так называемой теории очередей. В связи с быстрым развитием информационных технологий важнейшей сферой приложения ТМО является проектирование цифровых сетей интегрального обслуживания (ЦСИО), которые представляют собой технологии связи для одновременной цифровой передачи голоса, изображений, видео и других сетевых данных и услуг по цифровым каналам телефонной сети. Информационные потоки сообщений, функционирующие в ЦСИО, совершенствуются и вместе с тем усложняются. Как показывает практика, довольно часто параметры, определяющие поток событий, неизвестны либо случайно изменяются во времени. Поэтому адекватными математическими моделями данных потоков являются *дважды стохастические потоки событий* [4, 5, 37, 89, 94, 104–106, 109, 126]. Вышеупомянутые потоки событий характеризуются следующим образом. Моменты наступления событий потока являются случайными, а также интенсивность потока представляет собой случайный процесс. Таким образом, имеется двойная случайность, т.е. двойная стохастика, что и приводит к определению дважды стохастического потока событий.

Данные потоки событий широко применяются в качестве математических моделей входящих потоков различных систем массового обслуживания (СМО) [15, 26, 54, 58, 90, 102, 108, 120]. Фундаментальной задачей ТМО является нахождение вероятностных характеристик, определяющих функциональные возможности, принцип и эффективность функционирования СМО. Случайные потоки событий, в свою очередь, являются основными элементами СМО, несущими в систему большие потоки информации.

На текущий момент дважды стохастические потоки событий применяются в

качестве математических моделей реальных информационных потоков сообщений в телекоммуникационных, компьютерных, информационно-вычислительных сетях. Примерами практической применимости данных потоков событий являются: задача по оценке производительности широкополосных беспроводных сетей вдоль протяженных транспортных магистралей (совокупность станций, объединенных беспроводными каналами связи) с использованием в качестве входящего потока MAP-потока событий в многофазной СМО [11]; применение дважды стохастических потоков для аппроксимации данных трафика локальных сетей Ethernet в Bellcore Morristown Research and Engineering Center, сформированных в виде последовательностей моментов наступления пакетов, образующих коррелированный информационный поток (для аппроксимации использовался принцип суперпозиции нескольких дважды стохастических потоков на разных временных интервалах) [111].

В этой связи следует отметить актуальность изучения данных потоков.

Условия функционирования реальных процессов и систем являются таковыми, что параметры входящих в систему потоков являются ненаблюдаемыми, наблюдаются лишь моменты наступления событий потока (заявок, сообщений). Сопровождающий случайный процесс (в частном случае интенсивность) дважды стохастических потоков событий, являющийся скрытым (т.е. ненаблюдаемым) процессом, характеризуется дискретным или конечным множеством состояний и множеством параметров. Поэтому решение задач оценки состояний [6, 27, 30, 100, 113, 117] и параметров [8, 28, 31, 34, 97, 98, 124] дважды стохастического потока (сопровождающего случайного процесса) представляет существенный интерес. При этом сопровождающий процесс является принципиально ненаблюдаемым и используется в качестве описательного и вычислительного математического аппарата, а наблюдаются только моменты времени наступления событий. Тогда задачи оценивания состояний и параметров потока решаются по наблюдениям за моментами наступления событий.

В данной диссертационной работе рассматривается дважды стохастический

поток событий с числом состояний, равным двум, и описываемый восемью параметрами.

В зависимости от способа перехода сопровождающего случайного процесса из состояния в состояние дважды стохастические потоки событий можно разделить на следующие три типа: 1) синхронные потоки, переход из состояния в состояние в которых зависит непосредственно от момента наступления события [20, 32, 34]; 2) асинхронные потоки, переход из состояния в состояние в которых не зависит момента наступления события [10, 21, 27, 74, 101]; 3) полусинхронные потоки, у которых для одного состояния справедливо определение первого типа, а для другого состояния – второго типа [25, 28, 29, 33, 41, 61].

В свою очередь, в зависимости от математической модели потока событий дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: 1) потоки, у которых длительность интервала между соседними событиями задается одной случайной величиной [8, 9, 25, 28, 32]; 2) потоки, у которых длительность интервала между соседними событиями задается двумя случайными величинами – *потоки второго порядка* [6, 111].

На практике любая обслуживающая система затрачивает определенное время на регистрацию события (заявки, сообщения), в течение которого регистрирующий прибор не способен регистрировать последующие события. Таким образом, событие, поступившее в систему, порождает период *мертвого времени* [1, 23, 24, 118] или период ненаблюдаемости, в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения, иначе говоря, теряются. Наступившие в период ненаблюдаемости события могут продлевать или не продлевать длительность мертвого времени, поэтому выделяют модели с продлевающимся и непродлевающимся мертвым временем. В настоящей работе полагается, что данный период времени является фиксированным, а также, что следующее наступившее в период мертвого времени событие потока не продлевает его длительность (непродлеваемое мертвое время).

Термин «мертвое время» используется для систем регистрации дискретных событий, в частности, детекторы частиц и ядер. Примером ситуации

возникновения периода мертвого времени является прибор для регистрации (подсчета) попавших в него заряженных частиц (альфа-, бета-, гамма- лучи) – счетчик Гейгера-Мюллера. При попадании частицы в счетчике возрастает напряжение и ток, временно не позволяющие прибору регистрировать следующую частицу.

Тогда существенный интерес представляет оценивание периода ненаблюдаемости для оценки среднего числа потерянных событий в потоке. Аналитическое решение данной задачи позволит на практике повысить эффективность функционирования системы обслуживания. В работах [9, 20–22, 31, 59, 71] рассматриваются задачи подобного рода для различных типов дважды стохастических потоков событий.

Объектом исследования настоящей работы является *полусинхронный поток событий второго порядка*. В работе рассматривается названный поток при его полной наблюдаемости и частичной наблюдаемости, т.е. в условиях существования непродлевающегося мертвого времени.

Все вышесказанное подтверждает актуальность темы диссертационного исследования и развивает теорию и практику дважды стохастических потоков событий, являющихся математическими моделями входящих информационных потоков сообщений, заявок, данных в наше время интенсивного использования компьютерных, цифровых и информационно-вычислительных технологий, когда потоки представляют собой большие массивы разнородных данных.

**Степень разработанности темы исследования.** Впервые модель дважды стохастического потока была опубликована в 1955 году Д. Коксом [94], в которой интенсивность потока является непрерывным случайным процессом; данная модель носит название *процесса Кокса* или *дважды стохастического пуассоновского процесса*. Аналогичная модель потока также рассмотрена в работе Дж. Кингмена в 1964 году [104].

Далее в 1979 г. в работах Г.П. Башарина, В.А. Кокотушкина и В. А. Наумова [4, 5], М. Ньютона [109] и в 1991 г. в работе Д. Лукантони [106] были рассмотрены дважды стохастические потоки с интенсивностью, являющейся кусочно-

постоянным случайным процессом с конечным числом состояний. В работах [4, 5] введены *МС-потоки* (Markov chain), являющиеся потоками с интенсивностью, управляемой цепью Маркова; в [109] рассмотрены versatile Markov point process, или *МАР-потоки* (Markovian arrival process), являющиеся потоками, управляемыми марковским процессом; в [106], в свою очередь, введены в рассмотрение *ВМАР-потоки* (batch Markovian arrival process), где в каждый момент времени события наступают «пачками».

МАР-потоки событий широко используются в настоящее время для аппроксимации информационных потоков в телекоммуникационных сетях. К примеру, в работах [11–13, 36, 37, 105, 125] вышеприведенные потоки были использованы в задачах с широкополосными сетями беспроводной связи вдоль протяженных транспортных магистралей. Можно отметить, что вышеупомянутые в разделе «актуальность» настоящей работы синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки событий являются частными случаями МАР-потоков.

В настоящее время достаточно подробно изучены синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки, в которых интенсивность потока формируется одной случайной величиной. Менее изученными являются дважды стохастические потоки с интенсивностью, заданной двумя случайными величинами. Примерами являются работы [6, 62, 87, 111, 112]: модулированный МАР-поток, обобщенный синхронный поток событий второго порядка.

Основными задачами, которые возникают при исследовании дважды стохастических потоков событий являются следующие задачи: 1) задача оценивания состояний потока (задача фильтрации состояний потока событий); 2) задача оценивания параметров потока. Задачи оценивания первого типа решены в работах [6, 27, 30, 100, 113, 117], задачи второго типа в [8, 28, 31, 34, 97, 98, 99, 124] для различных типов дважды стохастических потоков.

Заметим, что усложнение математической модели потока событий влечет за собой естественное усложнение решения отмеченных выше задач, особенно, для потоков второго порядка [71–73] и потоков с произвольным числом состояний [42].

В литературе исследуются дважды стохастические потоки событий с двумя

состояниями, в одном из которых имеет место нулевая интенсивность (альтернирующие потоки). В [74] отмечается, что данные потоки могут являться математическими моделями потоков, поступающих в общую сеть из одного источника. Два состояния характеризуются следующим образом: информация пересылается с максимальной интенсивностью либо не пересылается. В качестве примера в [74] приведен источник, посылающий информацию на обслуживающий прибор по мере ее накопления с возможными ситуациями: начало и конец интервала передачи информации совпадают с моментами пересылки первой и последней порции информации, что определяет альтернирующий *синхронный поток*; длительности интервалов времени, когда источник осуществляет передачу информации, определяет обслуживающий прибор исходя из загруженности сети, тогда имеет место *асинхронный поток*; интервал передачи открывается источником, а закрывается обслуживающим прибором, или наоборот, что определяет *полусинхронный поток* событий.

Дважды стохастические потоки событий изучаются как при их полной наблюдаемости, так и при частичной, т.е. функционирующие в условиях мертвого времени [1]. Стоит отметить, что характер мертвого времени классифицируется по нескольким признакам. Говорят о продлеваемом мертвом времени [25], когда наступившее в период ненаблюдаемости событие продлевает период длительности мертвого времени, в ином случае говорят о непродлеваемом мертвом времени. Выделяют также мертвое время фиксированной длительности [21, 29, 59] и случайное мертвое время [22, 38, 60].

Можно сказать, что мертвое время является искажающим фактором в модели потока событий, т.к. в период его длительности теряются события потока. Соответственно, чем больше период мертвого времени, тем больше событий, содержащих информацию, теряется. В этой связи оценка длительности мертвого времени является актуальной задачей, позволяющей оценить потерю информации. Как правило, для оценивания длительности мертвого времени применяют метод моментов и метод максимального правдоподобия [25, 41, 59, 110].

Исследованием дважды стохастических потоков событий, а также СМО с входящими дважды стохастическими потоками занимались и занимаются ученые различных научных школ: А. Ф. Терпугов, А. М. Горцев, К. И. Лившиц, А. А. Назаров, Л. А. Нежелская, А. Н. Моисеев, М. Е. Завгородняя – в Национальном исследовательском Томском государственном университете [22, 25, 47, 48, 53, 55, 56, 79, 95, 96]; В. М. Вишневский, М. П. Фархадов – в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук [12–14, 80]; Г. А. Медведев, А. Н. Дудин, В. И. Клименок, Г. В. Царенков – в Белорусском государственном университете [37, 51, 52, 85]; Ю. В. Малинковский – в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины [49, 50]; Г. П. Башарин, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуйлов – в Российском университете Дружбы народов [2, 3, 16, 78]; А. В. Зорин, М. А. Федоткин – в Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете имени Н. И. Лобачевского [39, 40, 127]; Г. Ш. Цициашвили, Н. И. Головкин, В. В. Катрахов – в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук [18, 19, 123]; В. В. Рыков – в Российском государственном университете нефти и газа им. И. М. Губкина [7, 35, 75, 76]; М. Ньютс, Д. Лукантони, А. Баник, У. Гупта – в США [88, 106, 107, 109] и другие ученые.

Таким образом, начиная с 1955 г. и по настоящее время, дважды стохастические потоки событий являются актуальным объектом математических исследований. Вместе с развитием информационных технологий и компьютеризации модели дважды стохастических потоков развиваются и усложняются. Реальные потоки в телекоммуникационных сетях принимают все более замысловатые формы, поэтому исследование и разработка новых моделей дважды стохастических потоков как никогда актуальна.

В настоящей диссертации впервые рассматривается один из типов дважды стохастических потоков событий, а именно полусинхронный поток событий второго порядка. Более того, исследование потока проводится при его полной наблюдаемости, а также при наличии искажающего фактора – мертвого времени. Для данного потока событий в диссертационной работе решается задача

оценивания состояний. Отметим, что параметры потока в данной работе не оцениваются в связи со сложностью рассматриваемого объекта исследования, поэтому решается задача оценки параметров плотности распределения вероятностей длительности интервала между событиями потока и задача оценки длительности мертвого времени.

Данное исследование поможет расширить класс применяемых входящих потоков в различных СМО, а также класс математических моделей информационных потоков событий (сообщений, заявок), функционирующих в сетях связи различного рода.

**Цель и задачи исследования.** Целью исследования является аналитическое и численное изучение полусинхронного потока событий второго порядка.

В диссертационной работе поставлены и решены следующие задачи:

- построение математической модели полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной и частичной наблюдаемости;
- разработка алгоритмов оптимального оценивания состояний потока при его полной и частичной наблюдаемости;
- оценивание параметров плотности распределения вероятностей длительности интервала между соседними событиями потока;
- оценивание длительности мертвого времени;
- установление качества оценивания состояний, параметров распределения и длительности мертвого времени путем постановки и проведения статистических экспериментов на построенной имитационной модели потока.

**Научная новизна исследования** заключается в том, что в диссертационной работе впервые изучается новая математическая модель дважды стохастического потока событий, а именно: полусинхронный поток событий второго порядка. Впервые решается задача оптимального оценивания состояний потока в условиях его полной и частичной наблюдаемости, а также решаются задачи оценивания параметров распределения вероятностей и задача оценивания длительности мертвого времени в случае функционирования потока в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности.

**Теоретическая и практическая значимость диссертации.** Результаты исследования расширяют класс дважды стохастических потоков событий, а вместе с тем и класс математических моделей для описания входящих потоков в СМО. Аналитические результаты диссертационного исследования вносят вклад в теорию дважды стохастических потоков событий и могут быть использованы при решении прикладных задач сферы массового обслуживания, в частности, на начальном этапе проектирования телекоммуникационных, компьютерных и вычислительных сетей связи.

Настоящее исследование может быть использовано в учебном процессе в институте прикладной математики и компьютерных наук (ИПМКН) НИ ТГУ в курсах «Имитационное моделирование» – для бакалавров последнего года обучения; «Оценка состояний дважды стохастических потоков событий», «Оценка параметров дважды стохастических потоков событий» – для магистрантов последнего года обучения.

**Методология исследования.** В работе применяются методы теории вероятностей и случайных процессов, теории массового обслуживания и марковских процессов, математической статистики, теории дифференциальных уравнений, а также методы имитационного моделирования с использованием языка программирования C# в среде Microsoft Visual Studio.

**На защиту выносятся:**

- математическая модель полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка в случаях его полной и частичной наблюдаемости (при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности);
- алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его полной наблюдаемости, основанный на методе максимума апостериорной вероятности;
- алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его частичной наблюдаемости, основанный на методе максимума апостериорной вероятности;
- алгоритм оценивания параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями потока методом моментов;
- алгоритм оценивания длительности непродлевающегося мертвого

времени методом моментов;

– численные результаты экспериментов по установлению качества оценивания путем проведения статистических испытаний на разработанной имитационной модели потока.

**Степень достоверности результатов исследования.** Достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением математического аппарата при получении явных формул, непосредственно используемых при решении задач оценивания, согласованностью полученных аналитических результатов с имеющимися формулами для дважды стохастического полусинхронного потока событий, являющегося частным случаем исследуемого полусинхронного потока событий второго порядка. Кроме того, достоверность результатов исследования подтверждается многочисленными статистическими экспериментами, проведенными с использованием имитационной модели рассматриваемого потока событий, разработанной и отлаженной на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013, результаты которых согласуются с физическими представлениями об объекте исследования.

**Апробация результатов исследования.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. IV Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 20–21 мая 2016 г.); доклад на тему «Имитационная модель полусинхронного потока второго порядка».

2. V Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 19–29 мая 2017 г.); доклад на тему «Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка».

3. VI Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 24–26 мая 2018 г.); доклад на тему «Статистические эксперименты на имитационной

модели полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его неполной наблюдаемости».

4. VI Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 24–26 мая 2018 г.); доклад на тему «Simulation Modeling of Semi-Synchronous Event Flow of the Second Order under Conditions of its Incomplete Observability».

5. XII конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» ICAM 2018 (Алтай, 04–08 июня 2018 г.); доклад на тему «Апостериорные вероятности состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях неполной наблюдаемости».

6. XVII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, 10–15 сентября 2018 г.); доклад на тему «Оптимальная оценка состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости».

7. VII Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 23–25 мая 2019 г.); доклад на тему «Оценивание методом моментов параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями рекуррентного полусинхронного потока второго порядка в особом случае».

8. VII Международная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 23–25 мая 2019 г.); доклад на тему «Estimation of the Probability Density Parameters of the Interval Duration between Events in Recurrent Semi-synchronous Event Flow of the Second Order in a Special Case by the Method of Moments».

9. XVIII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Саратов, 26–30 июня 2019 г.); доклад на тему «Оценка параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями в рекуррентном полусинхронном потоке второго порядка методом моментов».

10. XXII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (ДССН-2019)» (Москва, 23–27 сентября 2019 г.); доклад на тему «Estimation of the Probability Density Parameters of the Interval Duration between Events in Correlated Semi-synchronous Event Flow of the Second Order by the Method of Moments».

11. XIII конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» ICAM 2020 (Томск, 07–09 сентября 2020 г.); доклад на тему «Плотность вероятности значений длительности интервала между событиями полусинхронного потока второго порядка в условиях неполной наблюдаемости».

**Публикации.** По результатам работы над диссертацией опубликованы 15 научных работ, представленных в разделе списка литературы настоящей диссертации, 3 из которых в журнале «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика», индексируемом в ВАК и международных базах цитирования Scopus и Web of Science, 3 статьи в сборниках «Communications in Computer and Information Science», индексируемых в международной базе цитирования Scopus, а также 9 публикаций в сборниках материалов конференций, индексируемых в базе цитирования РИНЦ.

**Личный вклад автора.** Математическая модель объекта исследования, постановка решенных в диссертации задач сформулированы научным руководителем, доктором физико-математических наук Л. А. Нежелской. Полученные аналитические результаты, приведенные в работе и выносимые на защиту, принадлежат лично автору. Математические расчеты, разработка имитационной модели рассматриваемого объекта, а также постановка статистических экспериментов на имитационной модели потока с целью получения численных результатов проведены лично автором. В совместных публикациях научному руководителю Л. А. Нежелской принадлежат математическое описание объекта исследования и постановки задач.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из

введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, трех приложений. Общий объем диссертации составляет 154 страницы; иллюстративный материал представлен 23 рисунками (из них 2 – в приложении Б) и 37 таблицами; список использованной литературы содержит 127 наименований.

**Во введении** к диссертации приводится актуальность, научная новизна и степень разработанности темы исследования, в том числе дается обзор работ других авторов по рассматриваемой тематике, формулируются цель и задачи исследования, приводится методология исследования, излагается теоретическая и практическая значимость работы, а также представляются результаты апробации полученных материалов исследования в виде докладов на научных конференциях.

**В первой главе** диссертации дается математическое описание полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости либо частичной наблюдаемости (при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности), а также приводятся основные свойства и характеристики потока. В том числе доказывается марковость сопровождающего случайного процесса и выводится матрица инфинитезимальных характеристик.

**Во второй главе** диссертационной работы разрабатывается алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка в обоих рассматриваемых случаях функционирования потока: в условиях его полной и частичной наблюдаемости. Алгоритм сформирован на основании явных формул для априорных и апостериорных вероятностей состояний потока, вывод которых изложен в данной главе.

**В третьей главе** диссертации выводится явный вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке событий второго порядка в условиях его полной и частичной наблюдаемости. Выводятся явные формулы для оценивания параметров плотности в условиях полной наблюдаемости потока событий, которое осуществляется методом моментов. В случае частичной наблюдаемости потока осуществляется оценка длительности непродлевающегося мертвого времени методом моментов для

коррелированного и рекуррентного потоков. Оценивание параметров плотности и длительности мертвого времени осуществляется для общего и особого случаев задания параметров потока, описание которых приведено в данной главе.

В настоящей главе доказываемость коррелированности рассматриваемого потока событий путем нахождения совместной плотности вероятности длительностей смежных интервалов, на основании которой выводятся условия рекуррентности потока для случаев его полной и частичной наблюдаемости.

**В четвертой главе** диссертационной работы приводятся результаты работы программы, реализующей имитационное моделирование полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной и частичной наблюдаемости, с целью установления ее работоспособности. Приводятся результаты статистических экспериментов, поставленных для установления качества оценивания состояний потока с использованием алгоритмов оптимального оценивания состояний потока, а также для установления качества полученных оценок параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями по явным формулам. Кроме того, приводятся численные результаты ряда экспериментов оценивания длительности мертвого времени в рассматриваемом потоке путем численного решения уравнений моментов.

**В заключении** подробно описываются основные результаты диссертационной работы и хода исследования, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, а также отмечаются возможные перспективы развития.

**В приложении А** дается описание концепта и процесса имитационного моделирования, приводится использование метода обратных функций для имитации полусинхронного потока событий второго порядка.

**В приложении Б** приводится общая блок-схема имитационного моделирования потока и ее описание.

**В приложении В** представлен акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс Национального исследовательского Томского государственного университета.

# 1 Математическая модель полусинхронного потока событий второго порядка

В данной главе диссертации дается математическое описание полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости и частичной наблюдаемости (в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени), а также приводятся основные свойства и характеристики потока.

Подробное математическое описание настоящего объекта исследования приводится в работах автора [63, 64, 117].

## 1.1 Математическое описание потока при его полной наблюдаемости

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка (далее поток), сопровождающий случайный процесс которого  $\lambda(t)$  является кусочно-постоянным с двумя состояниями  $S_1$  и  $S_2$ . Далее по тексту под  $i$ -м состоянием процесса понимается состояние  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Длительность интервала между событиями потока в первом состоянии определяется случайной величиной  $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ , где случайная величина  $\xi^{(1)}$  имеет функцию распределения  $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ ,  $t \geq 0$ , случайная величина  $\xi^{(2)}$  имеет функцию распределения  $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ ;  $\xi^{(1)}$  и  $\xi^{(2)}$  – независимые случайные величины.

В момент наступления события потока процесс  $\lambda(t)$  переходит из состояния  $S_1$  в  $S_2$  либо с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)$ , либо с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)$  в зависимости от того, какая из случайных величин  $\xi^{(1)}$ ,  $\xi^{(2)}$  приняла минимальное значение. В момент наступления события потока процесс  $\lambda(t)$  остается в состоянии  $S_1$  (переходит из состояния  $S_1$  в  $S_1$ ) либо с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1)$ , либо с

вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1)$  в зависимости от того, какая из случайных величин  $\xi^{(1)}$  или  $\xi^{(2)}$  приняла минимальное значение. Здесь  $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = 1$ ,  $P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 1$ . Длительность интервала между событиями потока в состоянии  $S_1$  процесса  $\lambda(t)$  является случайной величиной с функцией распределения  $F(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$ ,  $t \geq 0$ .

Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_2$  есть случайная величина с функцией распределения  $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$ ,  $t \geq 0$ . В течение времени пребывания процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_2$  имеет место пуассоновский поток событий с параметром  $\lambda_2$ . Переход процесса  $\lambda(t)$  из состояния  $S_2$  в  $S_1$  происходит в произвольный момент времени, не связанный с моментом времени наступления события пуассоновского потока с параметром  $\lambda_2$ .

В последующем изложении полагается, что имеет место состояние  $S_i$  ( $i$ -е состояние) процесса  $\lambda(t)$ , если  $\lambda(t) = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ .

Описанный выше поток ведет себя как синхронный поток в состоянии  $S_1$  и как асинхронный в состоянии  $S_2$ ; при формировании потока в состоянии  $S_1$  участвуют две случайные величины  $\xi^{(1)}$  и  $\xi^{(2)}$ . В связи с вышесказанным рассматриваемый поток носит название *полусинхронного потока событий второго порядка*.

Первая и вторая случайные величины являются независимыми друг от друга. Тогда в сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – марковский процесс. Доказательство марковости процесса  $\lambda(t)$  приведено ниже в разделе 1.3 настоящей главы.

Процесс  $\lambda(t)$  является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаются только моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  наступления событий потока, тогда  $\lambda(t)$  – скрытый марковский процесс или ненаблюдаемый сопровождающий марковский процесс.

*В дальнейшем изложении обозначение  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  используется применительно как к случайным величинам, так и к их значениям, различие между которыми следует из контекста. Например, наблюдаемые (измеряемые)*

моменты наступления событий есть значения случайных величин – моментов наступления событий.

Для наглядности на рисунке 1.1 приведен пример одной из реализаций процесса  $\lambda(t)$ , где  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  – моменты наступления событий потока.

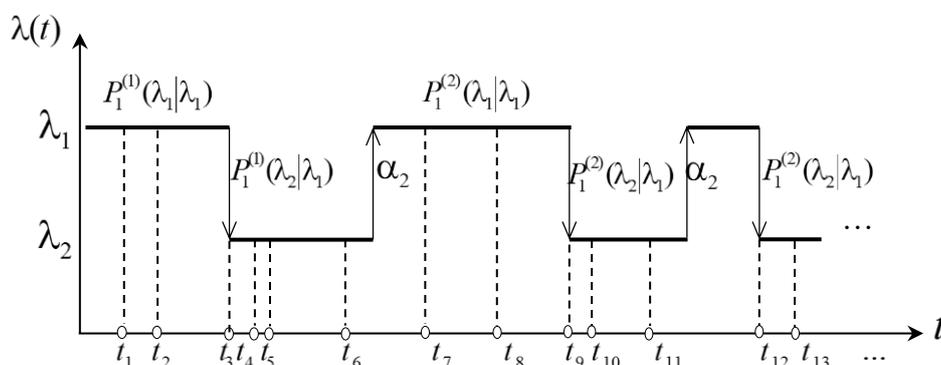


Рисунок 1.1 – Полусинхронный поток событий второго порядка

## 1.2 Математическое описание потока при его частичной наблюдаемости

Как было отмечено во введении к настоящей работе, на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на регистрацию события некоторый период времени, в течение которого прибор не способен зарегистрировать следующее событие, т.е. событие, поступившее на устройство, порождает период так называемого мертвого времени [1, 118], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению. Будем полагать, что данный период продолжается некоторое фиксированное время, а события, наступившие в этот период, не вызывают его продления (непродлеваемое мертвое время).

Далее рассмотрим полусинхронный поток событий второго порядка при его частичной наблюдаемости. К условиям математического описания потока, изложенного в предыдущем разделе 1.1, добавляются условия функционирования потока при непродлеваемом мертвом времени. Непродлеваемое мертвое время определим следующим образом.

После каждого зарегистрированного в момент времени  $t_k$  события наступает период мертвого времени фиксированной длительности  $T$ , в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению и не вызывают его продления. После окончания периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности  $T$  и т.д. Для наглядности на рисунке 1.2 приведен пример возникающей ситуации, где  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; периоды мертвого времени длительности  $T$  обозначены штриховкой; черными кружками обозначены события полусинхронного потока второго порядка, недоступные наблюдению.

На первой временной оси отмечены моменты наступления событий исходного полусинхронного потока второго порядка. На второй временной оси изображена схема создания мертвого времени фиксированной длительности в рассматриваемом потоке. На третьей временной оси приведены моменты наступления событий наблюдаемого потока.

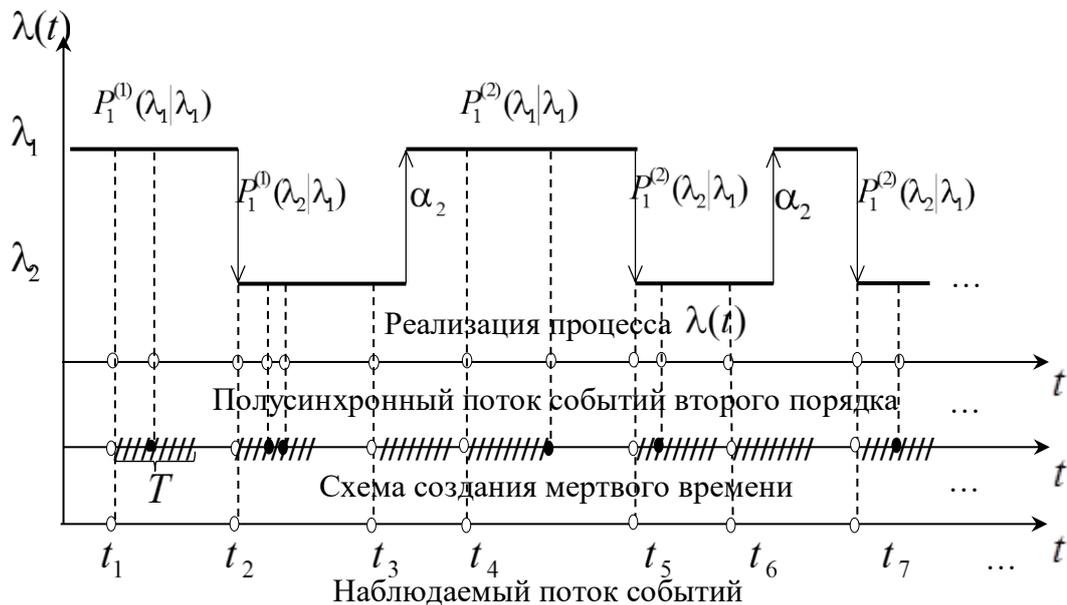


Рисунок 1.2 – Формирование наблюдаемого потока событий

### 1.3 Некоторые свойства потока

**Утверждение 1.1.** Процесс  $\lambda(t)$  является марковским.

**Доказательство.** Покажем, что в полусинхронном потоке событий второго порядка процесс  $\lambda(t)$  является марковским. Для доказательства рассмотрим функции распределения длительности пребывания процесса  $\lambda(t)$  в каждом из состояний.

Покажем, что длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии есть случайная величина с функцией распределения

$$F_1(t) = 1 - e^{-[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)]t}, \quad t \geq 0.$$

В момент наступления события потока в первом состоянии стартуют две случайные величины  $\xi^{(1)}$  и  $\xi^{(2)}$ . Длительность интервала между событиями потока определяется случайной величиной  $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ , где случайная величина  $\xi^{(1)}$  имеет функцию распределения  $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ ,  $t \geq 0$ , случайная величина  $\xi^{(2)}$  имеет функцию распределения  $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$ ,  $t \geq 0$ ;  $\xi^{(1)}$  и  $\xi^{(2)}$  являются взаимно независимыми случайными величинами. Тогда функция распределения длительности интервала между событиями есть  $F(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$ ,  $t \geq 0$ ;  $\lambda_1 + \alpha_1$  – интенсивность пуассоновского потока в состоянии  $S_1$ .

Рассмотрим *первую случайную величину*  $\xi^{(1)}$ . Обозначим  $\tau_k$  – значение длительности интервала между соседними событиями потока,  $k = 1, 2, \dots$ . Каждая из величин  $\tau_k$  представляет собой реализацию случайной величины  $\xi^{(1)}$ , распределенной по  $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ ,  $t \geq 0$ . Обозначим  $T_1^{(1)}$  – случайная величина – длительность участка стационарности в состоянии  $S_1$  (длительность временного интервала, на котором  $\lambda(t) = \lambda_1$ ).

Для нахождения функции распределения  $T_1^{(1)}$  применим схему рандомизации [81].

Если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются взаимно независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром  $\lambda$ , то сумма

$X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  имеет плотность  $g_n(\tau) = \lambda \frac{(\lambda\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ . Данная формула называется формулой Эрланга.

Далее число слагаемых  $n$  в сумме  $X_n$  является параметром, который рандомизируется с помощью распределения вероятностей  $P(N = n) = p_n$ . Тогда плотность суммы  $X_N$ , где  $N$  случайно,  $p_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) p_n$ ,  $\tau \geq 0$ , является плотностью распределения вероятностей значений случайной величины  $T_1^{(1)}$ .

Нетрудно показать, что для рассматриваемого потока распределение  $P(N = n) = p_n$  представляет собой геометрическое распределение, т.е.  $p_n = p(1-p)^{n-1}$ , где  $p = P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ ,  $1-p = P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ .

Тогда

$$p_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \lambda_1 \frac{(\lambda_1 \tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1 \tau}, \tau \geq 0.$$

Или, после несложных преобразований, получим плотность распределения вероятностей значений случайной величины  $T_1^{(1)}$  – длительности участка стационарности процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_1$ :

$$p_1(\tau) = p\lambda_1 e^{-p\lambda_1 \tau}, \tau \geq 0.$$

Тогда соответствующая функция распределения  $T_1^{(1)}$  определяется следующим образом

$$F^{(1)}(\tau) = P(T_1^{(1)} < \tau) = \int_0^{\tau} p_1(t) dt$$

или, после интегрирования, находим

$$F^{(1)}(\tau) = 1 - e^{-\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) \tau}, \tau \geq 0.$$

Аналогичная ситуация имеет место при рассмотрении *второй случайной величины*  $\xi^{(2)}$  с функцией распределения  $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$ ,  $t \geq 0$ . Повторив все

вышеизложенные рассуждения, находим функцию распределения случайной величины  $T_1^{(2)}$ :

$$F^{(2)}(\tau) = P(T_1^{(2)} < \tau) = 1 - e^{-\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)\tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Поскольку длительность интервала стационарности в состоянии  $S_1$  определяется случайной величиной  $T_1 = \min(T_1^{(1)}, T_1^{(2)})$ , тогда функция распределения длительности временного интервала, на котором значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$ , действительно, есть

$$F_1(t) = 1 - e^{-[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)]t}, \quad t \geq 0.$$

Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону

$$F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}, \quad t \geq 0.$$

Экспоненциальное распределение обладает свойством отсутствия последействия, следовательно, процесс  $\lambda(t)$  является марковским. *Утверждение 1.1 доказано.*

**Утверждение 1.2.** Последовательность  $\{\lambda(t_k)\}$  представляет собой вложенную по моментам наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  цепь Маркова.

*Доказательство.* Согласно утверждению 1.1 процесс  $\lambda(t)$  является марковским процессом с двумя состояниями  $S_1$  и  $S_2$ . Когда  $\lambda(t) = \lambda_1$ , имеет место состояние  $S_1$ , а при  $\lambda(t) = \lambda_2$  – состояние  $S_2$ .

Так как рассматривается стационарный режим функционирования потока, и поток является ординарным, то, если в любой момент времени  $t$  поток обладает свойством отсутствия последействия, то это есть простейший поток. Однако, рассматриваемый поток не является простейшим, значит, он обладает последействием. Поэтому рассмотрим момент времени  $t_k, k = 1, 2, \dots$  – момент времени наступления события потока, и покажем, что поведение потока после момента времени  $t_k$  не зависит от предыстории, а зависит только от состояния

потока в момент времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда последовательность  $\{\lambda(t_k)\}$  является вложенной цепью Маркова.

Пусть в момент времени  $t_k$  имеет место первое состояние процесса  $\lambda(t)$ , т.е.  $\lambda(t_k) = \lambda_1$ . Отметим, что: 1) длительность интервала между событиями потока в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$  является случайной величиной с функцией распределения  $F(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$ ,  $t \geq 0$ , т.е. в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$  имеет место пуассоновский поток с параметром  $\lambda_1 + \alpha_1$ ; и тогда поведение потока (процесса  $\lambda(t)$ ) после момента времени  $t_k$  не зависит от предыстории; 2) длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии есть случайная величина с функцией распределения  $F_1(t) = 1 - e^{-[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]t}$ ,  $t \geq 0$ , что, в силу отсутствия последствия, говорит о том, что оставшаяся часть времени пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии, начиная с момента времени  $t_k$ , не зависит от того, как долго процесс  $\lambda(t)$  находился в первом состоянии до момента времени  $t_k$ .

Пусть в момент времени  $t_k$  имеет место второе состояние процесса  $\lambda(t)$ , т.е.  $\lambda(t_k) = \lambda_2$ . Отметим, что: 1) в течение времени пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии имеет место пуассоновский поток событий с параметром  $\lambda_2$ ; 2) длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии есть случайная величина с функцией распределения  $F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$ ,  $t \geq 0$ , что, в силу отсутствия последствия экспоненциального закона, говорит о том, что оставшаяся часть длительности пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии, начиная с момента времени  $t_k$ , не зависит от того, как долго процесс  $\lambda(t)$  находился во втором состоянии до момента времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . *Утверждение 1.2 доказано.*

#### 1.4 Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$

Рассмотрим на временной оси  $t$  полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$  (рисунок 1.3).

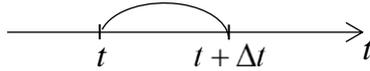


Рисунок 1.3 – Полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$  на временной оси  $t$

Опишем все возможные события, которые могут произойти на данном полуинтервале.

1. Пусть процесс  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  находится в первом состоянии, т.е.  $\lambda(t) = \lambda_1$ . Тогда возможны следующие ситуации:

1) на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не наступит событие потока с вероятностью  $e^{-\alpha_1 \Delta t}$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  наступит событие потока с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}$ , и в момент наступления события потока процесс  $\lambda(t)$  перейдет из первого состояния в первое с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ ; вероятность этого сложного события равна

$$e^{-\alpha_1 \Delta t} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}) P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = (1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)) (\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)) P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t);$$

2) на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не наступит событие потока с вероятностью, равной  $e^{-\lambda_1 \Delta t}$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  наступит событие потока с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}$ , и в момент наступления события потока процесс  $\lambda(t)$  перейдет из первого состояния в первое с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ ; вероятность этого сложного события равна

$$(1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}) P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) e^{-\lambda_1 \Delta t} = \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t).$$

Тогда вероятность ситуации – наступление события потока и переход процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния в первое – равна

$$(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 / \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 / \lambda_1)) \Delta t + o(\Delta t);$$

3) аналогично вероятность ситуации – наступление события потока и переход процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния во второе – находится в виде

$$(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 / \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 / \lambda_1)) \Delta t + o(\Delta t);$$

4) на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не наступит событие потока с вероятностью  $e^{-\lambda_1 \Delta t}$  и не наступит событие потока с вероятностью  $e^{-\alpha_1 \Delta t}$ ; вероятность этого сложного события равна

$$e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - (\lambda_1 + \alpha_1) \Delta t + o(\Delta t).$$

Другие возможные ситуации, связанные с пребыванием процесса  $\lambda(t)$  на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  в первом состоянии, имеют вероятность  $o(\Delta t)$ .

*II. Пусть процесс  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  находится во втором состоянии, т.е.  $\lambda(t) = \lambda_2$ . Тогда возможны следующие ситуации:*

1) на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  второе состояние процесса  $\lambda(t)$  не закончится с вероятностью, равной  $e^{-\alpha_2 \Delta t}$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  наступит событие пуассоновского потока с вероятностью  $\lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t}$ ; вероятность этого сложного события есть

$$e^{-\alpha_2 \Delta t} \lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t} = (1 - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)) (\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)) = \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t);$$

2) на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  второе состояние процесса  $\lambda(t)$  закончится с вероятностью, равной  $1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  событие пуассоновского потока не наступит с вероятностью  $e^{-\lambda_2 \Delta t}$ ; вероятность этого сложного события равна

$$(1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}) e^{-\lambda_2 \Delta t} = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t);$$

3) на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не наступит событие пуассоновского потока с вероятностью  $e^{-\lambda_2 \Delta t}$  и не закончится второе состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\alpha_2 \Delta t}$ ; вероятность этого сложного события равна

$$e^{-\lambda_2 \Delta t} e^{-\alpha_2 \Delta t} = 1 - (\lambda_2 + \alpha_2) \Delta t + o(\Delta t).$$

Другие возможные ситуации, связанные с пребыванием процесса  $\lambda(t)$  на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  во втором состоянии, имеют вероятность  $o(\Delta t)$ .

Тогда интенсивность перехода процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния в первое  $d_{11}^{(1)}$  с наступлением события потока выглядит следующим образом:

$$d_{11}^{(1)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1))\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) -$$

один из элементов матрицы  $D_1$ . Аналогично получаются все остальные элементы матриц  $D_0$  и  $D_1$  инфинитезимальных характеристик процесса  $\lambda(t)$  [57]:

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Элементами матрицы  $D_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

## 1.5 Выводы и результаты по первой главе

В первой главе диссертации получены следующие результаты:

- построена и описана математическая модель полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка при его полной и частичной наблюдаемости;
- доказана марковость сопровождающего ненаблюдаемого случайного процесса  $\lambda(t)$ ;
- доказано, что последовательность  $\{\lambda(t_k)\}$  представляет собой вложенную по моментам наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  цепь Маркова;
- получены матрицы инфинитезимальных характеристик процесса  $\lambda(t)$ .

## **2 Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка**

Во второй главе диссертации разрабатывается алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка (процесса  $\lambda(t)$ ) в обоих рассматриваемых случаях функционирования потока: в условиях его полной либо частичной наблюдаемости.

Ранее отмечалось, что процесс  $\lambda(t)$  является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаемыми являются моменты наступления событий потока  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ . В связи с этим возникает задача оценки состояния процесса  $\lambda(t)$  по наблюдениям за потоком событий на временном интервале  $(0, t]$ .

Задача решается методом максимума апостериорной вероятности. Данный метод применяется в связи с тем, что апостериорная вероятность является такой характеристикой, которая обладает наиболее полной информацией об исследуемом объекте, содержащейся в выборке наблюдений за объектом. При этом метод максимума апостериорной вероятности обеспечивает минимум полной вероятности ошибки принятия решения (оптимальное оценивание состояний) [46, 82].

Результаты данной главы опубликованы в работах автора [67, 68, 117] в случае полной наблюдаемости и в [66, 69] в случае частичной наблюдаемости потока.

### **2.1 Оптимальная оценка состояний потока при его полной наблюдаемости**

Рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости, математическое описание которого приведено в разделе 1.1 главы 1. Требуется по наблюдениям  $t_1, t_2, \dots$  за потоком событий на временном интервале  $(t_0, t)$  оценить состояние процесса  $\lambda(t)$  (потока) в

момент окончания наблюдений  $t$ , где  $t_0$  – момент начала наблюдений. Без ограничений общности можно положить  $t_0 = 0$ .

Для вынесения решения о состоянии случайного ненаблюдаемого процесса  $\lambda(t)$  в произвольный момент времени  $t$  необходимо получить выражения для апостериорных вероятностей  $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$ ,  $i = 1, 2$ , того, что в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  – количество событий потока, наступивших за время  $t$ ) при условии, что известна реализация  $t_1, t_2, \dots, t_m$  моментов наступления событий потока на заданном полуинтервале  $(0, t]$ , при этом  $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$ .

На основании полученных формул необходимо разработать алгоритм оптимального оценивания состояний процесса  $\lambda(t)$ . Решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  выносится по критерию максимума апостериорной вероятности [46] на основании сравнения вероятностей  $w(\lambda_1 | t)$  и  $w(\lambda_2 | t)$ : если  $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$ , т.е.  $w(\lambda_1 | t) \geq 0.5$ , то оценка  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$ , в противном случае –  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ .

### 2.1.1 Вид рекуррентного соотношения для апостериорных вероятностей

Сначала получим рекуррентные соотношения для апостериорных вероятностей в случае, когда время  $t$  изменяется дискретно с шагом  $\Delta t$  [82], а затем в полученных формулах перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Пусть время изменяется дискретно с шагом  $\Delta t$ :  $t = k\Delta t$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Введем двумерный случайный процесс следующего вида  $(\lambda(k\Delta t), r_k(\Delta t)) = (\lambda(k\Delta t), r(k\Delta t) - r((k-1)\Delta t)) = (\lambda^{(k)}, r_k)$ , где  $\lambda(k\Delta t) = \lambda^{(k)}$  – значение процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $k\Delta t$ ;  $r(k\Delta t) = r_k$  – количество событий потока, наступивших на интервале  $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$  длины  $\Delta t$ , причем  $r_k = 0; 1$  в силу малости  $\Delta t$  и определения потока.

**Утверждение 2.1.** Двумерный процесс  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  является марковским.

*Доказательство.* Покажем, что в полусинхронном потоке событий второго

порядка двумерный процесс  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  является марковским.

Первая компонента процесса  $\lambda^{(k)}$  – марковская, то есть дальнейшее поведение процесса  $\lambda(t)$  не зависит от предыстории, а определяется только значением процесса  $\lambda(t)$  в данный момент времени  $k\Delta t$ , так как процесс  $\lambda(t)$  – марковский.

Рассмотрим вторую компоненту  $r_k$  двумерного процесса  $(\lambda^{(k)}, r_k)$ . Если процесс  $\lambda(t)$  находится в состоянии  $S_1$ , то события пуассоновского потока с параметром  $\lambda_1 + \alpha_1$  наступают только в момент перехода процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния в  $i$ -е состояние ( $i=1, 2$ ), который может происходить только внутри интервала  $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ . Сам же момент перехода определяется моментом окончания первого состояния, а этот момент не зависит от предыстории, так как длительность участка стационарности в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$  – случайная величина с функцией распределения  $F_1(t) = 1 - e^{-[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]t}$ ,  $t \geq 0$ .

Во втором состоянии процесса  $\lambda(t)$  имеет место пуассоновский поток событий с параметром  $\lambda_2$ .

Таким образом, вторая компонента  $r_k$  рассматриваемого двумерного процесса не зависит от предыстории, следовательно, является марковской.

Компонента  $\lambda^{(k)}$  не влияет на  $r_k$ , так как  $\lambda^{(k)}$  – значение процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $k\Delta t$ ,  $r_k$  – количество событий потока, наступивших на интервале  $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$  (в силу конструкции процесса  $(\lambda^{(k)}, r_k)$ ).

Компонента  $r_k$  влияет на  $\lambda^{(k)}$ , т.к. на  $\lambda^{(k)}$  влияет смена состояний процесса  $\lambda(t)$  на интервале  $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ , которая (смена) связана с наступлением (или ненаступлением) события.

Таким, образом, двумерный процесс  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  является марковским.  
*Утверждение 2.1 доказано.*

Обозначим  $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$  – вектор значений второй компоненты двумерного процесса  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  на некотором интервале  $(0, m\Delta t)$ , где  $r_0$  – количество

событий потока на интервале  $(-\Delta t, 0)$ ; но так как на данном интервале поток не наблюдается, то  $r_0$  можно задать произвольным образом, поэтому возьмем  $r_0 = 0$ .

Обозначим  $\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$  – последовательность ненаблюдаемых значений процесса  $\lambda(t)$  на интервале  $(0, m\Delta t)$ , где  $\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Необходимо найти апостериорную вероятность  $w(\lambda_1 / \mathbf{r}_m)$  того, что в момент времени  $m\Delta t$  процесс  $\lambda(t)$  находится в состоянии  $\lambda_1$ , то есть  $\lambda(m\Delta t) = \lambda_1$ , при условии, что наблюдалась реализация  $\mathbf{r}_m$ . Причем  $w(\lambda_2 / \mathbf{r}_m) = 1 - w(\lambda_1 / \mathbf{r}_m)$ .

Обозначим  $p(\lambda^{(k)}, r_k / \lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$  – вероятность перехода процесса  $\lambda(t)$  за один шаг  $\Delta t$  из состояния  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  в состояние  $(\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ .

Пусть  $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$  – совместная вероятность значений  $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ ,  $\mathbf{r}_m$ . Так как процесс  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  является марковским, то совместная вероятность представляется в виде произведения вероятностей перехода:

$$w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^m p(\lambda^{(k)}, r_k / \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}).$$

Рассмотрим интервал  $(0, (m+1)\Delta t)$ ; для него аналогично имеем

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}) &= w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^{m+1} p(\lambda^{(k)}, r_k / \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = \\ &= w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^m p(\lambda^{(k)}, r_k / \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m) = \\ &= w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

На основании формулы для условных вероятностей можно записать, что

$$w(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{w(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1})}{w(\mathbf{r}_{m+1})} = \frac{1}{w(\mathbf{r}_{m+1})} w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^{m+1} p(\lambda^{(k)}, r_k / \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}). \quad (2.1.2)$$

Известно  $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1})$ , где  $\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}$  – вектор значений  $\lambda(k\Delta t)$  на временном интервале  $(0, (m+1)\Delta t)$ . Далее найдем  $w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1})$  – условное апостериорное распределение вероятностей процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t = (m+1)\Delta t$ , т.е. в момент окончания наблюдений, где  $\lambda^{(m+1)}$  – значение процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $(m+1)\Delta t$ .

Найдем апостериорную вероятность  $w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1})$ , суммируя  $w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1})$  по всем возможным значениям  $\lambda^{(m)}$ :

$$w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = \sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \dots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}).$$

Воспользовавшись формулой (2.1.2), получим:

$$\begin{aligned} w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) &= \\ &= \frac{1}{w(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \dots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^m p(\lambda^{(k)}, r_k / \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m). \end{aligned}$$

Исходя из формул (2.1.1) и (2.1.2) имеем

$$w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m).$$

Тогда получим следующую формулу для апостериорной вероятности значения  $\lambda^{(m+1)}$  при условии известной на интервале  $(0, (m+1)\Delta t)$  реализации  $\mathbf{r}_{m+1}$ :

$$\begin{aligned} w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) &= \\ &= \frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \dots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m) = \\ &= \frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Воспользуемся условием нормировки

$$\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = 1.$$

Получим, с учетом (2.1.3):

$$\frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m) = 1.$$

Из последнего равенства находим коэффициент  $w(\mathbf{r}_m) / w(\mathbf{r}_{m+1})$  в виде

$$\frac{w(\mathbf{r}_m)}{w(\mathbf{r}_{m+1})} = \left[ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m) \right]^{-1}.$$

Подставляя данное выражение для  $w(\mathbf{r}_m) / w(\mathbf{r}_{m+1})$  в (2.1.3), получим рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей  $w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m)$ ,  $w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1})$ :

$$w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m)}. \quad (2.1.4)$$

Преобразуем формулу (2.1.4), записав переходную вероятность в следующем виде

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}, r_m) p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}).$$

В силу марковости компонент процесса  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  (утверждение 2.1) на значение компоненты  $\lambda^{(k)}$  в момент времени  $(m+1)\Delta t$  влияет только значение компоненты  $\lambda^{(k)}$  в момент времени  $m\Delta t$ , т.е. зависимости  $\lambda^{(m+1)}$  от  $r_m$  нет. Поэтому справедливо

$$p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}, r_{m+1}) = p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}).$$

Относительно второй компоненты процесса  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  в силу марковости получаем: значение компоненты  $r_k(\Delta t)$  на интервале времени  $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$  не зависит от значения компоненты  $r_k(\Delta t)$  на интервале времени  $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$ ; при этом имеет место зависимость компоненты  $r_{m+1}$  от  $\lambda^{(m+1)}$ .

Тогда получим

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} / \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}).$$

Напомним, что отличительной особенностью полусинхронного потока второго порядка является следующее: в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$  исследуемый поток ведет себя, как синхронный поток событий второго порядка [112].

Если в момент времени  $t$  процесс  $\lambda(t)$  находится во втором состоянии, т.е.  $\lambda(t) = \lambda_2$ , то в этом состоянии исследуемый поток ведет себя как асинхронный поток [27], и тогда на интервале  $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$  возможны следующие ситуации:

а) второе состояние не закончится и наступит событие пуассоновского потока с параметром  $\lambda_2$ ;

б) второе состояние закончится и процесс  $\lambda(t)$  перейдет из второго состояния в первое.

Другие ситуации имеют вероятность  $o(\Delta t)$ .

Из вышесказанного следует, что при переходе процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния рассматриваемая переходная вероятность принимает вид  $p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)})p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) = p(\lambda^{(m+1)} / \lambda_1)p(r_{m+1} / \lambda_1, \lambda^{(m+1)})$ ; из второго состояния рассматриваемая переходная вероятность принимает вид  $p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)})p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) = p(\lambda^{(m+1)} / \lambda_2)p(r_{m+1} / \lambda_2)$ .

В связи с этим введем индикатор  $I(\lambda^{(m)}) = \begin{cases} \lambda^{(m+1)}, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2. \end{cases}$

Тогда формула (2.1.4) запишется в виде

$$w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}. \quad (2.1.5)$$

## 2.1.2 Получение формулы пересчета для апостериорных вероятностей

**Лемма 2.1.** Апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 / t)$  в момент  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , наступления события полусинхронного потока второго порядка определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_1 / t_k + 0) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] w(\lambda_1 / t_k - 0)}{\lambda_2 + [\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2] w(\lambda_1 / t_k - 0)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1.6)$$

$$w(\lambda_2 / t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 / t_k + 0).$$

**Доказательство.** Рассмотрим полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$ , где  $t = m\Delta t$ ,  $t + \Delta t = (m + 1)\Delta t$ .

Обозначим

$$w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) = w(\lambda(t) / \mathbf{r}(t)), \quad w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda(t + \Delta t) / \mathbf{r}(t + \Delta t)).$$

Для краткости данные два выражения запишем в виде

$$w(\lambda^{(m)} / \mathbf{r}_m) = w(\lambda(t) / t), \quad w(\lambda^{(m+1)} / \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda(t + \Delta t) / t + \Delta t).$$

Тогда формула (2.1.5) примет вид

$$w(\lambda^{(m+1)} / t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t) p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t) p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}. \quad (2.1.7)$$

Рассмотрим возможные случаи наступления событий на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$ . Пусть  $r_{m+1} = 1$ , т.е. на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  наступает событие потока. Обозначим  $t_k$  – момент наступления события,  $t < t_k < t + \Delta t$ .

Пусть  $\Delta t = \Delta t' + \Delta t''$ ,  $t = t_k - \Delta t'$ ,  $t + \Delta t = t_k + \Delta t''$  (смотри рисунок 2.1).

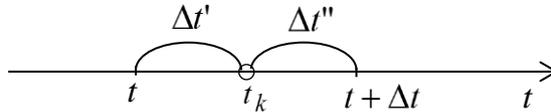


Рисунок 2.1 – Полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$  при наступлении события

В данном случае формула (2.1.7) запишется в виде

$$w(\lambda^{(m+1)} / t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}. \quad (2.1.8)$$

Пусть  $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$ .

Тогда формула (2.1.8) примет следующий вид

$$w(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}. \quad (2.1.9)$$

Распишем рекуррентное соотношение (2.1.9) для апостериорных вероятностей

$$\begin{aligned}
w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') &= [w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') p(\lambda_1 | \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_1, \lambda_1) + \\
&\quad + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') p(\lambda_1 | \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_2)] \times \\
&\quad \times [w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') p(\lambda_1 | \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_1, \lambda_1) + \\
&\quad + w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') p(\lambda_2 | \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_1, \lambda_2) + \\
&\quad + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') p(\lambda_1 | \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_2) + \\
&\quad + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') p(\lambda_2 | \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_2)]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Рассмотрим одну из вероятностей перехода процесса  $(\lambda^{(k)}, r_k)$  в выражении (2.1.9), например,

$$p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1).$$

Условная вероятность  $p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)$  записывается следующим образом:

$$p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \frac{p(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}{p(\lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}.$$

С другой стороны, справедливо

$$p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \frac{p(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \lambda^{(m)} = \lambda_1)}{p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \lambda^{(m)} = \lambda_1)}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= \\
&= p(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1).
\end{aligned}$$

Аналогично записываются и остальные переходные вероятности выражения (2.1.10).

Тогда, с учетом матрицы инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{D}_1$ , на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  получим:

1) вероятность того, что на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс  $\lambda(t)$  остался в первом состоянии с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$  или закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_1 \Delta t} = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс  $\lambda(t)$  остался в первом состоянии с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ , имеет вид

$$p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \\ = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \Delta t + o(\Delta t);$$

2) вероятность того, что на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось второе состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\alpha_2 \Delta t} = 1 - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$  и наступило событие пуассоновского потока с вероятностью  $\lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t} = \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$ , имеет вид

$$p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) = \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t);$$

3) вероятность того, что на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось второе состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_2 \Delta t} = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока с вероятностью  $\lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t}$ , и процесс  $\lambda(t)$  перешел из второго состояния в первое с вероятностью, равной единице, имеет вид

$$p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) = o(\Delta t);$$

4) вероятность того, что на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс перешел из первого состояния во второе с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)$  или закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_1 \Delta t} = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс  $\lambda(t)$  перешел из первого состояния во второе с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ , имеет вид

$$p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 / \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 / \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = \\ = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \Delta t + o(\Delta t);$$

Подставляя выписанные переходные вероятности в выражение (2.1.10), получим

$$w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') = [w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \Delta t + o(\Delta t)] \times \\ \times [w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \Delta t + \\ + w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \Delta t + \\ + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)]^{-1}. \quad (2.1.11)$$

Разделим числитель и знаменатель формулы (2.1.11) на  $\Delta t$ , после чего перейдет к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\Delta t'$ ,  $\Delta t''$  одновременно стремятся к нулю). Тогда приходим к (2.1.6).

Получили формулу пересчета (2.1.6) для определения апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  в момент наступления события  $t_k$ ,  $k=1,2,\dots$ , причем  $w(\lambda_2/t_k+0)=1-w(\lambda_1/t_k+0)$ . Лемма 2.1 доказана.

**Замечание к лемме 2.1.** Для того, чтобы применить формулу (2.1.6), необходимо знать апостериорную вероятность  $w(\lambda_1/t_k-0)$ , явный вид который определяется в следующем подразделе 2.1.3. Кроме того, из формулы (2.1.6) следует, что апостериорная вероятность  $w(\lambda_1/t)$  претерпевает разрыв 1-го рода (имеет место конечный скачок) в точке  $t=t_k$ ,  $k=1,2,\dots$ .

### 2.1.3 Вид апостериорной вероятности состояния потока при его полной наблюдаемости

**Лемма 2.2.** На временных интервалах  $(0,t_1)$  и  $(t_k,t_{k+1})$ ,  $k=1,2,\dots$ , апостериорная вероятность  $w(\lambda_1/t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dw(\lambda_1|t)}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)w^2(\lambda_1|t) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)w(\lambda_1|t) + \alpha_2. \quad (2.1.12)$$

*Доказательство.* Пусть  $r_{m+1}=0$ , т.е. на полуинтервале  $[t, t+\Delta t)$  не наступает событие потока:

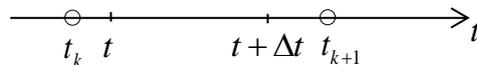


Рисунок 2.2 – Полуинтервал  $[t, t+\Delta t)$  без наступления события

Пусть  $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$ . Тогда формула (2.1.7) примет вид

$$w(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t) p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} / t) p(\lambda^{(m+1)} / \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 / \lambda^{(m)}, I(\lambda^{(m)}))}. \quad (2.1.13)$$

Распишем рекуррентное соотношение (2.1.13) для апостериорных вероятностей

$$\begin{aligned}
 w(\lambda_1 / t + \Delta t) = & (w(\lambda_1 / t) p(\lambda_1 / \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 / \lambda_1, \lambda_1) + \\
 & + w(\lambda_2 / t) p(\lambda_1 / \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 / \lambda_2)) \times \\
 & \times ((w(\lambda_1 / t) p(\lambda_1 / \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 / \lambda_1, \lambda_1) + \\
 & + w(\lambda_1 / t) p(\lambda_2 / \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 / \lambda_1, \lambda_2) + \\
 & + w(\lambda_2 / t) p(\lambda_1 / \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 / \lambda_2) + \\
 & + w(\lambda_2 / t) p(\lambda_2 / \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 / \lambda_2))^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Тогда, с учетом матрицы инфинитезимальных характеристик  $D_0$ , аналогично доказательству леммы 2.1, выпишем явный вид переходных вероятностей на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$ :

- 1)  $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 / \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) =$   
 $= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t);$
- 2)  $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) =$   
 $= e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\Delta t} = 1 - \lambda_2 \Delta t - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t);$
- 3)  $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 / \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 / \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = 0;$
- 4)  $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 / \lambda^{(m)} = \lambda_2) =$   
 $= e^{-\lambda_2 \Delta t} (1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}) = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t).$

Подставляя вычисленные переходные вероятности в выражение (2.1.14), получим

$$w(\lambda_1 / t + \Delta t) = \frac{w(\lambda_1 / t)(1 - \lambda_1 \Delta t - \alpha_1 \Delta t) + w(\lambda_2 / t)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)}{w(\lambda_1 / t)(1 - \lambda_1 \Delta t - \alpha_1 \Delta t) + w(\lambda_2 / t)(1 - \lambda_2 \Delta t) + o(\Delta t)}.$$

Или, преобразовав, находим

$$w(\lambda_1 / t + \Delta t) = \frac{w(\lambda_1 / t) - (\lambda_1 + \alpha_1)w(\lambda_1 / t)\Delta t + \alpha_2 w(\lambda_2 / t)\Delta t + o(\Delta t)}{1 - [(\lambda_1 + \alpha_1)w(\lambda_1 / t) + \lambda_2 w(\lambda_2 / t)]\Delta t + o(\Delta t)}.$$

Преобразуем последнее выражение для  $w(\lambda_1 / t + \Delta t)$ , воспользовавшись формулой Маклорена разложения дроби относительно малой величины  $x$ ,  $x > 0$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x).$$

Имеем

$$w(\lambda_1/t + \Delta t) = \{w(\lambda_1/t) - (\lambda_1 + \alpha_1)w(\lambda_1/t)\Delta t + \alpha_2 w(\lambda_2/t)\Delta t + o(\Delta t)\} \times \\ \times \{1 + [(\lambda_1 + \alpha_1)w(\lambda_1/t) + \lambda_2 w(\lambda_2/t)]\Delta t + o(\Delta t)\}$$

или

$$w(\lambda_1/t + \Delta t) = w(\lambda_1/t) - (\lambda_1 + \alpha_1)w(\lambda_1/t)\Delta t + \alpha_2 w(\lambda_2/t)\Delta t + (\lambda_1 + \alpha_1)w^2(\lambda_1/t)\Delta t + \\ + \lambda_2 w(\lambda_1/t)w(\lambda_2/t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделив обе части последнего равенства на  $\Delta t$ , получим

$$\frac{w(\lambda_1/t + \Delta t) - w(\lambda_1/t)}{\Delta t} = -(\lambda_1 + \alpha_1)w(\lambda_1/t) + \alpha_2 w(\lambda_2/t) + (\lambda_1 + \alpha_1)w^2(\lambda_1/t) + \\ + \lambda_2 w(\lambda_1/t)w(\lambda_2/t) + o(\Delta t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Устремим  $\Delta t \rightarrow 0$  и, учитывая, что  $w(\lambda_2/t) = 1 - w(\lambda_1/t)$ , приходим к (2.1.12).

Получили дифференциальное уравнение Риккати [86]. *Лемма 2.2 доказана.*

**Теорема 2.1.** На временных интервалах  $(0, t_1)$  и  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}{[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (2.1.15)$$

где  $w_1 = \frac{\alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1}$ ,  $t_k < t < t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ;  $w(\lambda_1/t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , задается формулой

(2.1.6).

*Доказательство.* Заметим, что уравнение Риккати является уравнением с постоянными коэффициентами, следовательно, интегрируется в квадратурах. Приравняем правую часть уравнения Риккати (2.1.12) к нулю и найдем корни полученного уравнения

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)w^2(\lambda_1/t) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)w(\lambda_1/t) + \alpha_2 = 0. \quad (2.1.16)$$

Вычислим дискриминант данного квадратного уравнения.

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)\alpha_2.$$

После несложных преобразований получим  $D = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2$ .

Таким образом, корни уравнения (2.1.16) имеют вид

$$w_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_1 + \alpha_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)} \Rightarrow w_1 = \frac{\alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1};$$

$$w_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)} \Rightarrow w_2 = 1; w_1 < w_2 \Rightarrow w_1 < 1.$$

Тогда уравнение (2.1.12) примет следующий вид

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(w(\lambda_1 | t) - w_1)(w(\lambda_1 | t) - 1).$$

Решим последнее дифференциальное уравнение методом разделения переменных. С учетом того, что апостериорная вероятность  $w(\lambda_1/t)$  в момент времени  $t_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , наступления события потока принимает значение  $w(\lambda_1/t=t_k) = w(\lambda_1/t_k)$ , приходим к недифференциальному уравнению

$$\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)} \int_{w(\lambda_1/t_k)}^{w(\lambda_1/t)} \frac{dw(\lambda_1/t)}{(w(\lambda_1/t) - w_1)(w(\lambda_1/t) - 1)} = \int_{t_k}^t dt.$$

Разложив на простейшие дроби функцию под знаком интеграла в левой части уравнения, получим

$$\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)} \int_{w(\lambda_1/t_k)}^{w(\lambda_1/t)} \left[ \frac{dw(\lambda_1/t)}{(w_1 - 1)(w(\lambda_1/t) - w_1)} + \frac{dw(\lambda_1/t)}{(1 - w_1)(w(\lambda_1/t) - 1)} \right] = \int_{t_k}^t dt.$$

Вычислив интегралы, находим

$$\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)} \frac{1}{(w_1 - 1)} \left[ \ln \frac{w(\lambda_1/t) - w_1}{w(\lambda_1/t) - 1} - \ln \frac{w(\lambda_1/t_k) - w_1}{w(\lambda_1/t_k) - 1} \right] = t - t_k.$$

В результате преобразований запишем последнее уравнение в виде

$$\ln \left[ \frac{w(\lambda_1/t) - w_1}{w(\lambda_1/t) - 1} \frac{w(\lambda_1/t_k) - 1}{w(\lambda_1/t_k) - w_1} \right] = (t - t_k)(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(w_1 - 1).$$

Потенцируя данное логарифмическое уравнение, приходим к уравнению относительно  $w(\lambda_1/t)$ :

$$w(\lambda_1/t) - w_1 = \frac{w(\lambda_1/t_k) - w_1}{w(\lambda_1/t_k) - 1} (w(\lambda_1/t) - 1) e^{(t-t_k)(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(w_1 - 1)}$$

ИЛИ

$$w(\lambda_1/t) \left[ 1 - \frac{w(\lambda_1/t_k) - w_1}{w(\lambda_1/t_k) - 1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(w_1 - 1)(t - t_k)} \right] = w_1 - \frac{w(\lambda_1/t_k) - w_1}{w(\lambda_1/t_k) - 1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(w_1 - 1)(t - t_k)},$$

откуда получим явный вид апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  на временных полуинтервалах  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ :

$$w(\lambda_1/t) = \frac{w_1 - \frac{w(\lambda_1/t_k) - w_1}{w(\lambda_1/t_k) - 1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(w_1 - 1)(t - t_k)}}{1 - \frac{w(\lambda_1/t_k) - w_1}{w(\lambda_1/t_k) - 1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(w_1 - 1)(t - t_k)}},$$

где  $t_k < t < t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Выполнив необходимые преобразования в последнем выражении для  $w(\lambda_1/t)$ , имеем

$$w(\lambda_1/t) = \frac{w_1 [1 - w(\lambda_1/t_k)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_k)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}{[1 - w(\lambda_1/t_k)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_k)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}.$$

Для завершения доказательства напомним, что  $w(\lambda_1/t_k)$  – это апостериорная вероятность того, что в момент времени  $t_k$  наступления события потока процесс  $\lambda(t)$  находится в состоянии  $S_1$ . Эту вероятность определяет формула пересчета (2.1.6) (лемма 2.1). Подставляя  $w(\lambda_1/t_k + 0)$ , определенную в (2.1.6), вместо  $w(\lambda_1/t_k)$  в последнюю формулу, приходим к (2.1.15). *Теорема 2.1 доказана.*

#### 2.1.4 Нахождение явных выражений для априорных вероятностей

**Лемма 2.3.** Явный вид априорных финальных вероятностей  $\pi_1$  и  $\pi_2$  состояний процесса  $\lambda(t)$  в полусинхронном потоке событий второго порядка определяется выражениями:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2}, \\ \pi_2 = \frac{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2}, \end{cases} \quad (2.1.17)$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

*Доказательство.* Найдем дифференциальные уравнения для априорных вероятностей состояний процесса  $\lambda(t)$ . Обозначим  $t^0$  – начальный момент времени,  $\pi_i(t/t^0)$  – априорная вероятность  $i$ -го состояния в момент времени  $t$  при условии, что функционирование потока началось в момент времени  $t^0$ ,  $i = 1, 2$ .

Рассмотрим временной полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$  и определим вероятность  $\pi_i(t + \Delta t / t^0)$ ,  $i = 1, 2$ .

Опишем возможные ситуации, возникающие на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$ :

1) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $\pi_1(t/t^0)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t} = (1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t))(1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t))$ ; тогда вероятность ситуации равна  $\pi_1(t/t^0)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + o(\Delta t)$ ;

2) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $\pi_1(t/t^0)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\lambda_1 \Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_1 \Delta t} = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс остался в первом состоянии с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ ; вероятность описанной ситуации равна  $\pi_1(t/t^0)\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t)$ ;

3) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $\pi_1(t/t^0)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось первое состояние процесса с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс остался в первом состоянии с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ ; вероятность рассмотренной ситуации есть  $\pi_1(t/t^0)\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t)$ ;

4) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_2$  с вероятностью  $\pi_2(t/t^0)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось второе состояние процесса с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_2 \Delta t} = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ , и процесс перешел из второго состояния в первое с вероятностью единица; вероятность описанной ситуации равна  $\pi_2(t/t^0)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ ;

5) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_2$  с вероятностью  $\pi_2(t/t^0)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось второе состояние процесса  $\lambda(t)$  с

вероятностью  $e^{-\alpha_2 \Delta t} = 1 - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ ; вероятность ситуации равна  $\pi_2(t/t^0)(1 - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t))$ ;

б) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $\pi_1(t/t^0)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось первое состояние процесса с вероятностью  $e^{-\lambda_1 \Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось первое состояние процесса с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_1 \Delta t} = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс перешел из первого состояния во второе с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)$ ; вероятность описанной ситуации равна  $\pi_1(t/t^0)\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)\Delta t + o(\Delta t)$ ;

7) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $\pi_1(t/t^0)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс перешел из первого состояния во второе с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)$ ; вероятность рассмотренной ситуации равна  $\pi_1(t/t^0)\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)\Delta t + o(\Delta t)$ .

Тогда вероятности  $\pi_1(t + \Delta t/t^0)$ ,  $\pi_2(t + \Delta t/t^0)$  определяются в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1(t + \Delta t/t^0) = \pi_1(t/t^0)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + \pi_1(t/t^0)\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)\Delta t + \\ \quad + \pi_1(t/t^0)\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)\Delta t + \pi_2(t/t^0)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ \pi_2(t + \Delta t/t^0) = \pi_2(t/t^0)(1 - \alpha_2 \Delta t) + \pi_1(t/t^0)\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)\Delta t + \\ \quad + \pi_1(t/t^0)\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)\Delta t + o(\Delta t). \end{array} \right.$$

Выполнив в последней системе равенств необходимые преобразования, разделив обе части каждого из равенств на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем систему линейных дифференциальных уравнений относительно  $\pi_1(t/t^0)$ ,  $\pi_2(t/t^0)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1'(t/t^0) = (\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) - \alpha_1 - \lambda_1)\pi_1(t/t^0) + \alpha_2 \pi_2(t/t^0), \\ \pi_2'(t/t^0) = (\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1))\pi_1(t/t^0) - \alpha_2 \pi_2(t/t^0). \end{array} \right.$$

Решим данную систему, учитывая начальные условия вида

$$\begin{cases} \pi_1(t^0/t^0) = \pi, \\ \pi_2(t^0/t^0) = 1 - \pi. \end{cases}$$

Для удобства обозначим  $x(t) = \pi_1(t/t^0)$ ,  $y(t) = \pi_2(t/t^0)$ .

Тогда имеем систему вида

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t), \\ y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t), \end{cases}$$

где  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) - \alpha_1 - \lambda_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) & -\alpha_2 \end{bmatrix}$  – матрица коэффициентов системы.

Решим полученную систему с постоянными коэффициентами методом исключения. Исключим  $y(t)$  из первого уравнения системы

$$y(t) = \frac{1}{a_{12}} x'(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}} x(t)$$

и подставим во второе уравнение. Тогда получим

$$\frac{1}{a_{12}} x''(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}} x'(t) = a_{21}x(t) - a_{22}y(t).$$

Наконец, подставив  $y(t)$  в последнее дифференциальное уравнение, имеем

$$\frac{1}{a_{12}} x''(t) - \frac{a_{11}}{a_{12}} x'(t) = a_{21}x(t) - \frac{a_{22}}{a_{12}} x'(t) - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}} x(t).$$

В результате несложных преобразований приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции  $x(t)$ :

$$x''(t) - (a_{11} + a_{22})x'(t) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x(t) = 0.$$

В последнем дифференциальном уравнении сделаем замену вида

$$x(t) = e^{kt},$$

в результате которой приходим к характеристическому уравнению относительно  $k$ :

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Корни данного квадратного уравнения равны

$$k_1 = 0, \quad k_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Тогда решение для  $x(t)$  имеет вид

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{k_2 t}$$

или

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{(\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1))t},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы.

Тогда находим

$$y(t) = -C_1 \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) - 1) + \frac{\lambda_1}{\alpha_2} (P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) - 1) \right] - C_2 e^{(\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1))t}.$$

Определим значения  $C_1$  и  $C_2$ , воспользовавшись начальными условиями

$$\begin{cases} \pi_1(t^0/t^0) = \pi, \\ \pi_2(t^0/t^0) = 1 - \pi. \end{cases}$$

Учитывая введенные обозначения для  $x(t)$  и  $y(t)$ , запишем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^{k_2 t^0} = \pi, \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} C_1 - C_2 e^{k_2 t^0} = 1 - \pi. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получим значения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad C_2 = \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{12}} e^{-k_2 t^0} + \pi e^{-k_2 t}.$$

Подставив полученные  $C_1$ ,  $C_2$  и вернувшись к исходным обозначениям, находим решение системы дифференциальных уравнений относительно  $\pi_1(t/t^0)$  и  $\pi_2(t/t^0)$  в виде

$$\begin{cases} \pi_1(t/t^0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2} + \\ + \left[ \pi - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2} \right] e^{-(\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2)(t-t^0)}, \\ \pi_2(t/t^0) = \frac{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2} - \\ - \left[ \pi - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2} \right] e^{-(\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2)(t-t^0)}. \end{cases}$$

В стационарном режиме при  $t \rightarrow \infty$  ( $t^0 \rightarrow -\infty$ ), получим явный вид финальных вероятностей состояний процесса  $\lambda(t)$  в виде (2.1.17). *Лемма 2.3 доказана.*

### 2.1.5 Алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его полной наблюдаемости

На основании полученных в подразделах 2.1.2–2.1.4 формул разработан алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка при его полной наблюдаемости, который приведен ниже.

1. В момент времени  $t_0=0$  вычисляется априорная вероятность первого состояния процесса  $\lambda(t)$ :

$$w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2}.$$

2. В любой момент времени  $t$ ,  $0 < t < t_1$ , где  $t_1$  – момент наступления первого события потока, вычисляется вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  по следующей формуле:

$$w(\lambda_1 / t) = \frac{w_1 [1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_0)}}{[1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_0)}},$$

где  $w_1 = \frac{\alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1}$ .

3. По формуле, представленной в п.2 алгоритма, в момент времени  $t = t_1$  наступления события потока вычисляется вероятность  $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$ , т.е.

$$w(\lambda_1 / t_1 - 0) = \frac{w_1 [1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t_1 - t_0)}}{[1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 / t_0 + 0)] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t_1 - t_0)}}.$$

4. В момент наступления события  $t = t_1$  вычисляется значение  $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$  по формуле пересчета:

$$w(\lambda_1 / t_1 + 0) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] w(\lambda_1 / t_1 - 0)}{[\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2] w(\lambda_1 / t_1 - 0) + \lambda_2}.$$

5. В любой момент времени  $t$ ,  $t_1 < t < t_2$ , вычисляется вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  по следующей формуле:

$$w(\lambda_1/t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1-w_1)(t-t_1)}}{[1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1-w_1)(t-t_1)}}.$$

6. Вычисляется вероятность  $w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$  по следующей формуле:

$$w(\lambda_1/t_2 - 0) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1-w_1)(t_2-t_1)}}{[1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_1 + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1-w_1)(t_2-t_1)}}.$$

7. Вычисляется вероятность  $w(\lambda_1/t_2 + 0)$  по формуле пересчета (2.1.6) для  $k = 2$  и т.д.

Параллельно по ходу вычисления апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  в любой момент времени  $t$  выносится решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$ : если  $w(\lambda_1/t) \geq w(\lambda_2/t)$ , т.е.  $w(\lambda_1 | t) \geq 0.5$ , то оценка  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$ , в противном случае —  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ .

## 2.2 Оптимальная оценка состояний потока при его частичной наблюдаемости

Рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка в условиях его частичной наблюдаемости (при непродлеваемом мертвом времени), математическое описание которого приведено в разделе 1.2 главы 1. Требуется по наблюдениям  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  за наблюдаемым потоком событий на временном интервале  $(t_0, t)$  оценить состояние процесса  $\lambda(t)$  (потока) в момент окончания наблюдений  $t$ , где  $t_0$  — момент начала наблюдений. Без ограничений общности можно положить  $t_0 = 0$ .

Аналогично, как и в разделе 2.1, для вынесения решения о состоянии случайного ненаблюдаемого процесса  $\lambda(t)$  в произвольный момент времени  $t$  необходимо получить выражения для апостериорных вероятностей  $w(\lambda_i/t) = w(\lambda_i/t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i/t_1, \dots, t_m, t)$ ,  $i=1, 2$ , того, что в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  — количество наблюдаемых событий потока за время  $t$ ) при условии, что известна реализация  $t_1, t_2, \dots, t_m$  моментов наступления

событий наблюдаемого потока на заданном полуинтервале  $(0, t]$ , при этом  $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$ .

Решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  выносится по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения вероятностей  $w(\lambda_1/t)$  и  $w(\lambda_2 | t)$ : если  $w(\lambda_1/t) \geq w(\lambda_2/t)$ , т.е.  $w(\lambda_1 | t) \geq 0.5$ , то оценка  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$ , в противном случае –  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ .

Сформулируем некоторые предпосылки для нахождения апостериорных вероятностей.

Пусть момент вынесения решения  $t$  принадлежит интервалу  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , между соседними событиями наблюдаемого потока. Для начального интервала  $(t_0, t_1)$  момент времени  $t$  лежит между началом наблюдения за потоком и первым событием в наблюдаемом потоке. Далее рассмотрим интервал  $(t_k, t_{k+1})$ , значение длительности которого есть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Но, так как наблюдаемое в момент  $t_k$  событие порождает период мертвого времени фиксированной длительности  $T$ , то  $\tau_k = T + \eta_k$ , где  $\eta_k$  – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени  $t_k + T$  и моментом наступления следующего события наблюдаемого потока  $t_{k+1}$ , т.е. интервал  $(t_k, t_{k+1})$  разбивается на два смежных: первый – полуинтервал  $(t_k, t_k + T]$ , второй – интервал  $(t_k + T, t_{k+1})$ . Следует отметить, что условия нахождения апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  на полуинтервале  $(t_k, t_k + T]$  и интервале  $(t_k + T, t_{k+1})$  принципиально различные. Действительно, на полуинтервале  $(t_k, t_k + T]$  поток является недоступным наблюдению, а на интервале  $(t_k + T, t_{k+1})$  поток наблюдаем. Кроме того, для нахождения вероятности  $w(\lambda_1/t)$  необходимо точно знать значение  $T$  либо предварительно оценить значение  $T$ . В противном случае, из-за отсутствия такой информации нахождение явного вида выражения для апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  является невозможным. В настоящей работе полагается, что значение  $T$  известно точно.

### 2.2.1 Вид апостериорной вероятности состояния потока при его частичной наблюдаемости

Рассмотрим случай наличия мертвого времени, т.е. когда значение  $T \neq 0$  (случай  $T = 0$  рассмотрен в разделе 2.1).

Для начала рассмотрим *полуинтервал*  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , на котором событие потока наступает в точке  $t_k$ ; отметим, что на самом полуинтервале события потока не наблюдаются (отсутствуют). Так как на данном полуинтервале, т.е. в течение периода мертвого времени  $T$ , полусинхронный поток событий второго порядка ненаблюдаем, поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  на  $(t_k, t_k + T]$  аналогично поведению априорной вероятности  $\pi_1(t/t^0)$  первого состояния процесса  $\lambda(t)$  для полусинхронного потока событий второго порядка; разница лишь в задании начального условия для  $w(\lambda_1/t)$  в момент времени  $t_k$  наступления события наблюдаемого потока.

Найдем дифференциальное уравнение для апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  ( $w(\lambda_2/t) = 1 - w(\lambda_1/t)$ ) первого состояния процесса  $\lambda(t)$  на полуинтервале  $(t_k, t_k + T]$ .

Итак, пусть  $w(\lambda_i/t)$  – апостериорная вероятность  $i$ -го состояния процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t_k < t \leq t_k + T$ ;  $w(\lambda_i/t + \Delta t)$  – апостериорная вероятность  $i$ -го состояния процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t + \Delta t$ ,  $t_k < t + \Delta t \leq t_k + T$ , где  $\Delta t$  – достаточно малая величина.

Рассмотрим временной полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$  и опишем всевозможные ситуации, связанные с поведением процесса  $\lambda(t)$ :

1) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $w(\lambda_1/t)$ , и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  не закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t} = (1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t))(1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t))$ ; тогда вероятность ситуации равна  $w(\lambda_1/t)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + o(\Delta t)$ ;

2) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $w(\lambda_1/t)$ , и за промежуток времени длительности  $\Delta t$  не закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\lambda_1 \Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , и за промежуток времени длительности  $\Delta t$  закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_1 \Delta t} = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс остался в первом состоянии с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ ; вероятность рассмотренной ситуации равна  $w(\lambda_1/t) \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t)$ ;

3) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  с вероятностью  $w(\lambda_1/t)$ , и за промежуток времени длительности  $\Delta t$  не закончилось первое состояние процесса  $\lambda(t)$  с вероятностью  $e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , и за промежуток времени длительности  $\Delta t$  закончилось первое состояние процесса с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ , наступило событие потока и процесс остался в первом состоянии с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ ; вероятность описанной ситуации есть  $w(\lambda_1/t) \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t)$ ;

4) в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_2$  с вероятностью  $w(\lambda_2/t)$ , и за промежуток времени длительности  $\Delta t$  закончилось второе состояние процесса с вероятностью  $1 - e^{-\alpha_2 \Delta t} = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ , и процесс перешел из второго состояния в первое с вероятностью единица; тогда вероятность рассмотренной ситуации равна  $w(\lambda_2/t) \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ .

Тогда для вероятности  $w(\lambda_1/t + \Delta t)$  имеет место равенство:

$$w(\lambda_1/t + \Delta t) = w(\lambda_1/t)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + w(\lambda_1/t)\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)\Delta t + w(\lambda_1/t)\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)\Delta t + w(\lambda_2/t)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t).$$

Разделим последнее равенство на  $\Delta t$  и, устремляя  $\Delta t \rightarrow 0$ , приходим к дифференциальному уравнению:

$$w'(\lambda_1/t) = (\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) - \alpha_1 - \lambda_1)w(\lambda_1/t) + w(\lambda_2/t)\alpha_2.$$

Учитывая, что  $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$ ,  $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 1$  и  $w(\lambda_2/t) =$

$= 1 - w(\lambda_1/t)$ , получим

$$w'(\lambda_1/t) = -(\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2)w(\lambda_1/t) + \alpha_2.$$

Для удобства обозначим  $y(t) = w(\lambda_1/t)$ ,  $a = \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2$ .

Тогда имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$y'(t) + ay(t) = \alpha_2,$$

которое решим методом разделения переменных. Находим

$$y(t) = \frac{\alpha_2}{a} + Ce^{-at}, \quad (2.2.1)$$

где  $C$  – произвольная константа.

Значение произвольной постоянной  $C$  найдем из начального условия  $w(\lambda_1/t_k) = w(\lambda_1/t_k + 0)$  или, с учетом переобозначений,  $y(t_k) = y(t_k + 0)$ . Имеем

$$C = \left[ y(t_k + 0) - \frac{\alpha_2}{a} \right] e^{at_k}. \quad (2.2.2)$$

Подставив найденное значение  $C$  в виде (2.2.2) в решение (2.2.1), получим

$$y(t) = \frac{\alpha_2}{a} + \left[ y(t_k + 0) - \frac{\alpha_2}{a} \right] e^{-a(t-t_k)}.$$

Вернувшись к исходным обозначениям, получим явную формулу, определяющую поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  для полусинхронного потока событий второго порядка на временных полуинтервалах  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$w(\lambda_1/t) = \pi_1 + [w(\lambda_1/t_k + 0) - \pi_1] e^{-a(t-t_k)},$$

где  $t_k < t \leq t_k + T$ ,  $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2$ ,  $\pi_1 = \alpha_2/a$ ,  $w(\lambda_1/t_k + 0)$  определяется формулой пересчета (2.1.6).

На основании полученных формул можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 2.2.** Поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  на временных полуинтервалах  $(t_k, t_k + T]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется формулой

$$w(\lambda_1/t) = \pi_1 + [w(\lambda_1/t_k + 0) - \pi_1] e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_2)(t-t_k)}, \quad (2.2.3)$$

$t_k < t \leq t_k + T$ ;  $w(\lambda_1/t_k + 0)$  задается формулой (2.1.6),  $\pi_1$  – формулой (2.1.17).

Далее рассмотрим *интервал*  $(t_k + T, t_{k+1})$ , смежный с полуинтервалом  $(t_k, t_k + T]$ . На рассматриваемом интервале поток является наблюдаемым, поэтому вычисление апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  осуществляется по формуле (2.1.15); при этом начальное условие для вероятности  $w(\lambda_1/t)$  привязывается к моменту времени  $t_k + T$

$$w(\lambda_1/t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1/t_k + T)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_k + T)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k - T)}}{[1 - w(\lambda_1/t_k + T)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_k + T)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k - T)}}, \quad (2.2.4)$$

$t_k + T < t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $w(\lambda_1/t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , рассчитывается по формуле (2.2.3) для  $t = t_k + T$ .

На начальном интервале  $t_0 = 0 < t < t_1$  вероятности  $w(\lambda_1/t)$ ,  $w(\lambda_1/t = t_1) = w(\lambda_1/t_1 - 0)$  рассчитываются по формуле

$$w(\lambda_1/t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1/t_0 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_0 + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_0)}}{[1 - w(\lambda_1/t_0 + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1/t_0 + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_0)}},$$

где  $w(\lambda_1/t_1 + 0) = \pi_1$ .

## 2.2.2 Алгоритм оптимального оценивания состояний потока при его частичной наблюдаемости

Полученные формулы предыдущего раздела 2.2.1 позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  ( $w(\lambda_2/t) = 1 - w(\lambda_1/t)$ ) и алгоритм принятия решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  (потока) в произвольный момент времени  $t$ :

1) в начальный момент времени  $t_0 = 0$  по формуле (2.1.17) вычисляется априорная вероятность  $w(\lambda_1/t_0 + 0) = w(\lambda_1/t_0 = 0) = \pi_1$ ;

2) в любой момент времени  $t$ ,  $0 < t < t_1$ , где  $t_1$  – момент наступления первого наблюдаемого события потока, для  $k = 0$  вычисляется апостериорная вероятность  $w(\lambda_1/t)$  по формуле (2.1.15);

3) для  $k=0$  в момент времени  $t_1$  вычисляется вероятность  $w(\lambda_1/t_1) = w(\lambda_1/t_1 - 0)$  по формуле (2.1.15);

4)  $k$  увеличивается на единицу и для  $k=1$  вычисляется  $w(\lambda_1/t_1 + 0)$  по формуле (2.1.6), при этом  $w(\lambda_1/t_1 + 0)$  – начальное условие для  $w(\lambda_1/t)$  в формуле (2.2.3) на следующем шаге алгоритма;

5) для  $k=1$  рассчитывается  $w(\lambda_1/t)$  по формуле (2.2.3) для любого  $t$ ,  $t_1 < t < t_1 + T$ ;

6) для  $k=1$  по формуле (2.2.3) вычисляется  $w(\lambda_1/t = t_1 + T)$ , которая является начальным значением для  $w(\lambda_1/t)$  на следующем шаге алгоритма;

7) для  $k=1$  в любой момент времени  $t$ ,  $t_1 + T < t < t_2$ , где  $t_2$  – момент наступления второго наблюдаемого события потока, вычисляется вероятность  $w(\lambda_1 | t)$  по формуле (2.2.4);

8) для  $k=1$  в момент времени  $t_2$  вычисляется вероятность  $w(\lambda_1/t = t_2) = w(\lambda_1/t_2 - 0)$  по формуле (2.2.4);

9) алгоритм переходит на шаг 4, и последующие шаги выполняются для  $k=2$  и т.д.

Параллельно, по ходу вычисления апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  по вышеизложенному алгоритму в любой момент времени  $t$  выносятся решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  по критерию максимума апостериорной вероятности [46, 82]: если  $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$ , то  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$ , иначе  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$ .

### 2.3 Выводы и результаты по второй главе

Во второй главе диссертации:

– получен вид рекуррентного соотношения (2.1.5) для апостериорных вероятностей;

– получена формула пересчета (2.1.6), определяющая поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  ( $w(\lambda_2/t) = 1 - w(\lambda_1/t)$ ) в моменты наступления

событий потока;

– получена формула (2.1.15), определяющая явный вид апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  на интервалах между моментами наступления событий потока при его полной наблюдаемости;

– получена формула (2.1.17) для априорных финальных вероятностей состояний процесса  $\lambda(t)$ ;

– на основании полученных формул (2.1.6), (2.1.15), (2.1.17) разработан алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его *полной наблюдаемости* (раздел 2.1.5) ;

– получено выражение (2.2.3), определяющее явный вид апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  на интервалах ненаблюдаемости потока;

– на основании полученных формул (2.1.6), (2.1.15), (2.1.17), (2.2.3) разработан алгоритм оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его *частичной наблюдаемости* (раздел 2.2.4).

Таким образом, разработанные алгоритмы оптимального оценивания состояний, приведенные в данной главе, позволят оценить состояния потока с использованием формул явного вида, обеспечив минимум полной вероятности ошибки принятия решения.

### **3 Оценивание параметров плотности распределения вероятностей и длительности мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка методом моментов**

В третьей главе данной диссертации выводятся явные формулы для оценивания параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости.

В случае частичной наблюдаемости потока по выборке моментов наблюдения событий производится оценка длительности непродлевающегося мертвого времени методом моментов для коррелированного и рекуррентного потоков, при этом остальные параметры потока считаются известными.

В данной главе также доказываемость коррелированность рассматриваемого потока событий путем нахождения совместной плотности вероятности длительностей смежных интервалов и выписываются условия рекуррентности потока для случаев полной и частичной наблюдаемости.

Оценка параметров и длительности мертвого времени как для коррелированного, так и для рекуррентного потоков производится методом моментов [50].

Кроме того, исследование проводится для двух случаев задания параметров потока: общего ( $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ ) и особого ( $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ).

Результаты настоящей главы по оценке параметров плотности опубликованы в работах [65, 72, 114–116], и в работах [70, 71, 73] по оценке длительности мертвого времени.

#### **3.1 Оценка параметров плотности распределения вероятностей**

Рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости, математическое описание которого приведено в разделе 1.1.

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – значение длительности интервала между соседними событиями потока,  $p(\tau)$  – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в рассматриваемом потоке. Т.к. рассматривается стационарный режим функционирования потока, то  $p(\tau_k) = p(\tau)$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\tau \geq 0$ . Вследствие этого без ограничения общности момент наступления события потока  $t_k$  можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть  $\tau = 0$ .

Требуется найти явный вид плотности вероятности  $p(\tau)$  длительности интервала между моментами наступления соседних событий в коррелированном полусинхронном потоке второго порядка для общего и особого случаев задания параметров потока и для каждого из рассмотренных случаев оценить параметры плотности методом моментов.

### 3.1.1 Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке для общего случая задания параметров

Для нахождения явного вида плотности  $p(\tau)$  сформулируем и докажем ряд лемм.

Введем в рассмотрение  $p_{ij}(\tau)$  – условную вероятность того, что на интервале  $(0, \tau)$  нет событий полусинхронного потока второго порядка, и в момент времени  $\tau$  значение процесса  $\lambda(\tau) = \lambda_j$  при условии, что в момент времени  $\tau = 0$  значение процесса  $\lambda(0) = \lambda_i$ ,  $i, j = 1, 2$ .

**Лемма 3.1.** Условные вероятности  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau) &= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad p_{12}(\tau) = 0, \\ p_{21}(\tau) &= \frac{\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} \left[ e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \right], \\ p_{22}(\tau) &= e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ .

**Доказательство.** Запишем допредельные равенства для  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , используя формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau + \Delta\tau) &= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau} p_{11}(\tau), \\ p_{21}(\tau + \Delta\tau) &= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau} p_{21}(\tau) + (1 - e^{-\alpha_2\Delta\tau}) e^{-\lambda_2\Delta\tau} p_{22}(\tau), \\ p_{22}(\tau + \Delta\tau) &= e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\Delta\tau} p_{22}(\tau). \end{aligned}$$

Отметим, что  $p_{12}(\tau) = 0$  по определению потока, т.к. переход процесса  $\lambda(\tau)$  из первого состояния во второе возможен только в момент наступления события потока.

Преобразуем записанные допредельные равенства, используя разложение экспоненты в ряд:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau) p_{11}(\tau) + o(\Delta\tau), \\ p_{21}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau) p_{21}(\tau) + \alpha_2 p_{22}(\tau) \Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\Delta\tau) p_{22}(\tau) + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Полученные выражения разделим на  $\Delta\tau$ , перейдем к пределу при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ . Получим систему дифференциальных уравнений для нахождения условных вероятностей  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} p'_{11}(\tau) &= -(\lambda_1 + \alpha_1) p_{11}(\tau), \quad p'_{22}(\tau) = -(\lambda_2 + \alpha_2) p_{22}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) &= -(\lambda_1 + \alpha_1) p_{21}(\tau) + \alpha_2 p_{22}(\tau), \\ p_{11}(0) &= 1, \quad p_{22}(0) = 1, \quad p_{21}(0) = 0. \end{aligned}$$

Решая записанную систему дифференциальных уравнений, приходим к (3.1.1). Лемма 3.1 доказана.

**Лемма 3.2.** Плотности вероятностей  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в полусинхронном потоке событий второго порядка определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j / \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j / \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \alpha_2 [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\tilde{p}_{22}(\tau) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}] + \lambda_2 e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0,$$

где  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ .

**Доказательство.** С учетом определения полусинхронного потока второго порядка введем совместную вероятность того, что без наступления событий потока на интервале  $(0, \tau)$  процесс  $\lambda(\tau)$  перешел на этом интервале из первого состояния в первое, на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  наступило событие потока с вероятностью  $\lambda_1 \Delta\tau e^{-\lambda_1 \Delta\tau}$  и в момент наступления события процесс  $\lambda(\tau)$  перешел из первого состояния в первое ( $S_1 \rightarrow S_1$ ) с вероятностью  $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$  и введем совместную вероятность того, что без наступления событий потока на интервале  $(0, \tau)$  процесс  $\lambda(\tau)$  перешел на этом интервале из первого состояние в первое ( $S_1 \rightarrow S_1$ ), на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  наступило событие потока с вероятностью  $\alpha_1 \Delta\tau e^{-\alpha_1 \Delta\tau}$  и в момент наступления события процесс  $\lambda(\tau)$  перешел из первого состояния в первое с вероятностью  $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ . Итак, переход из состояния  $S_1$  в  $S_1$  с наступлением события потока на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  происходит с вероятностью

$$p_{11}(\tau) [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Аналогичным образом определяются остальные совместные вероятности

$$p_{11}(\tau) [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad (S_1 \rightarrow S_2),$$

$$p_{21}(\tau) [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad (S_2 \rightarrow S_1),$$

$$p_{21}(\tau) [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad (S_2 \rightarrow S_2),$$

$$p_{22}(\tau) \lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad (S_2 \rightarrow S_2).$$

Отметим, что некоторые из вероятностей равны нулю в силу  $p_{12}(\tau) = 0$ .

Тогда соответствующие плотности вероятностей будут иметь вид

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau) = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] p_{11}(\tau), \quad \tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau) = 0,$$

$$\tilde{p}_{12}^{(2)}(\tau) = 0, \quad \tilde{p}_{12}^{(1)}(\tau) = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] p_{11}(\tau),$$

$$\tilde{p}_{21}^{(1)}(\tau) = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] p_{21}(\tau), \quad \tilde{p}_{21}^{(2)}(\tau) = 0,$$

$$\tilde{p}_{22}^{(1)}(\tau) = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] p_{21}(\tau), \quad \tilde{p}_{22}^{(2)}(\tau) = \lambda_2 p_{22}(\tau).$$

Таким образом, плотности вероятностей  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$  того, что процесс  $\lambda(\tau)$  перейдет на интервале  $(0, \tau)$  из состояния  $i$  в  $j$ ,  $i, j = 1, 2$ , без наступления событий потока на этом интервале и с наступлением события в момент  $\tau$ , запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] p_{11}(\tau), \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] p_{11}(\tau), \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] p_{21}(\tau), \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] p_{21}(\tau) + \lambda_2 p_{22}(\tau). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Подставляя (3.1.1) в (3.1.3), получим (3.1.2). Лемма 3.2 доказана.

Введем в рассмотрение вероятности перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , процесса  $\lambda(\tau)$  из состояния  $S_i$  в  $S_j$  за время, которое пройдет от момента  $\tau=0$  до момента наступления очередного события потока.

**Лемма 3.3.** Вероятности перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , процесса  $\lambda(\tau)$  в полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} p_{1j} &= \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \quad j=1,2, \quad p_{21} = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)}, \\ p_{22} &= \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha_2}, \quad p_{11} + p_{12} = 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

**Доказательство.** Так как  $\tau$  – произвольный момент времени, то вероятности перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , определяются в виде

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{ij}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.1.5)$$

Таким образом, подставляя (3.1.2) в (3.1.5), получим

$$p_{11} = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} d\tau,$$

$$\begin{aligned}
p_{12} &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} d\tau, \\
p_{21} &= \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} \int_0^{\infty} (e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}) d\tau, \\
p_{22} &= \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} \int_0^{\infty} (e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}) d\tau + \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Интегрируя полученные выражения, приходим к (3.1.4). *Лемма 3.3 доказана.*

Рассмотрим  $\pi_i(0)$  – условную стационарную вероятность того, что процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau=0$  находится в  $i$ -м состоянии при условии, что в момент времени  $\tau=0$  наступило событие потока,  $i=1, 2$ , причем  $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$ .

**Лемма 3.4.** Условные финальные вероятности  $\pi_i(0)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в полусинхронном потоке событий второго порядка определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\pi_1(0) &= \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \alpha_2}{\lambda_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] + (\lambda_1 + \alpha_1) \alpha_2}, \\
\pi_2(0) &= \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] (\lambda_2 + \alpha_2)}{\lambda_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] + (\lambda_1 + \alpha_1) \alpha_2}, \\
\pi_1(0) + \pi_2(0) &= 1.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

**Доказательство.** Последовательность моментов наступления событий потока  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , поэтому справедливы следующие уравнения

$$\pi_1(0) = p_{11}\pi_1(0) + p_{21}\pi_2(0), \quad \pi_2(0) = p_{12}\pi_1(0) + p_{22}\pi_2(0), \quad \pi_1(0) + \pi_2(0) = 1, \tag{3.1.7}$$

где вероятности  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , определяются выражениями (3.1.4).

Из (3.1.7) находим

$$\pi_1(0) = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}, \quad \pi_2(0) = \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}. \tag{3.1.8}$$

Подставляя (3.1.4) в (3.1.8), после несложных преобразований получим (3.1.6). *Лемма 3.4 доказана.*

Леммы 3.2 и 3.4 позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.1.** Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке событий второго порядка имеет вид

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

$$\gamma = \frac{\pi_1(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) - \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)}, \quad (\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0, \quad (3.1.9)$$

где  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ , вероятность  $\pi_1(0)$  определена в (3.1.6).

*Доказательство.* В силу того, что процесс  $\lambda(t)$  является марковским (утверждение 1.1), и моменты времени  $t_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , наступления событий образуют вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$  (утверждение 1.2), плотность вероятности  $p(\tau)$  длительности интервала между соседними событиями в рассматриваемом потоке определяется в виде

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (3.1.10)$$

Подставляя выражения (3.1.2) и (3.1.6) в формулу (3.1.10), получим

$$p(\tau) = (\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \left[ \frac{d\alpha_2}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2} - \frac{b(\lambda_2 + \alpha_2)}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} \right] +$$

$$+ (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} \left[ \frac{b(\lambda_1 + \alpha_1)}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_2 b}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2} \right], \quad (3.1.11)$$

где  $d = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ ,  $b = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ .

Упростим выражения в скобках в формуле (3.1.11), учитывая вид  $\pi_1(0)$ ,  $\pi_2(0)$  и условие  $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$ . Первая скобка (обозначим ее  $A$ ) преобразуется следующим образом:

$$A = \frac{d\alpha_2}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2} - \frac{b(\lambda_2 + \alpha_2)}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} = \pi_1(0) - \frac{\alpha_2 \pi_2(0)}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{\pi_1(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) - \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)}.$$

Затем рассмотрим вторую скобку в выражении (3.1.11), обозначив ее  $B$ :

$$B = \frac{b(\lambda_1 + \alpha_1)}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_2 b}{\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2}.$$

Преобразуем числитель в  $B$ :

$$b(\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2 + \lambda_2 b(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2) = b(\lambda_2 + \alpha_2)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)$$

и находим

$$B = \frac{b(\lambda_2 + \alpha_2)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)}{[\lambda_2 b + (\lambda_1 + \alpha_1)\alpha_2][(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)]} = \frac{\pi_2(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)}{[(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)]}.$$

Учитывая, что  $\pi_2(0) = 1 - \pi_1(0)$ , несложно показать, что

$$B = 1 - \frac{\pi_1(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) - \alpha_2}{[(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)]}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{\pi_1(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) - \alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)}, \quad z_1 = \lambda_1 + \alpha_1, \quad z_2 = \lambda_2 + \alpha_2.$$

Подставляя приведенные обозначения в выражение (3.1.11), получим (3.1.9).

*Теорема 3.1 доказана.*

### 3.1.2 Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке для особого случая задания параметров

Рассмотрим случай, когда в (3.1.9) величина  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ . Данный случай задания параметров потока назовем «особым».

**Лемма 3.5.** Условные вероятности  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в полусинхронном потоке событий в случае  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  имеют вид

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau) &= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad p_{12}(\tau) = 0, \\ p_{21}(\tau) &= (\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)\tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad p_{22}(\tau) = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

**Доказательство.** Аналогичным образом, как и для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$  (лемма 3.1), составим систему дифференциальных уравнений

для нахождения условных вероятностей  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Для этого запишем допредельные равенства с использованием формулы полной вероятности:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau + \Delta\tau) &= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau} p_{11}(\tau), \\ p_{21}(\tau + \Delta\tau) &= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau} p_{21}(\tau) + (1 - e^{-\alpha_2\Delta\tau}) e^{-\lambda_2\Delta\tau} p_{22}(\tau), \\ p_{22}(\tau + \Delta\tau) &= e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\Delta\tau} p_{22}(\tau), \end{aligned}$$

при этом  $p_{12}(\tau) = 0$  по определению потока.

Преобразуем записанные допредельные равенства, используя разложение экспоненты в ряд:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau) p_{11}(\tau) + o(\Delta\tau), \\ p_{21}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau) p_{21}(\tau) + \alpha_2 p_{22}(\tau) \Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\Delta\tau) p_{22}(\tau) + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Рассматривается случай, когда  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ , поэтому справедливы следующие соотношения

$$\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2, \quad \alpha_2 = \lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2.$$

Запишем допредельные равенства с учетом полученных соотношений:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau) p_{11}(\tau) + o(\Delta\tau), \\ p_{21}(\tau + \Delta\tau) &= (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau) p_{21}(\tau) + (\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) p_{22}(\tau) \Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau + \Delta\tau) &= p_{22}(\tau) - (\lambda_1 + \alpha_1) p_{22}(\tau) \Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Полученные выражения разделим на  $\Delta\tau$  и перейдем к пределу при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ . Тогда запишем систему дифференциальных уравнений для нахождения условных вероятностей  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} p'_{11}(\tau) &= -(\lambda_1 + \alpha_1) p_{11}(\tau), \quad p'_{22}(\tau) = -(\lambda_1 + \alpha_1) p_{22}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) &= -(\lambda_1 + \alpha_1) p_{21}(\tau) + (\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) p_{22}(\tau), \\ p_{11}(0) &= 1, \quad p_{22}(0) = 1, \quad p_{21}(0) = 0, \end{aligned}$$

при этом  $p_{12}(\tau) = 0$ . Решая данную систему уравнений, приходим к (3.1.12). *Лемма 3.5 доказана.*

**Лемма 3.6.** Плотности вероятностей  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в полусинхронном потоке событий второго порядка в случае  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  определяются

формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{11}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0.\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

**Доказательство.** Проводя аналогичные рассуждения, как и для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$  (лемма 3.2), можно утверждать, что плотности вероятностей  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$  того, что процесс  $\lambda(\tau)$  перейдет на интервале  $(0, \tau)$  из состояния  $i$  в  $j$ ,  $i, j = 1, 2$ , без наступления событий потока на этом интервале и с наступлением события в момент  $\tau$  запишутся в виде (3.1.3)

Подставляя (3.1.12) в (3.1.3), получим (3.1.13). *Лемма 3.6 доказана.*

**Лемма 3.7.** Вероятности перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , процесса  $\lambda(\tau)$  в полусинхронном потоке событий второго порядка в случае  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  имеют вид

$$\begin{aligned}p_{11} &= \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \quad p_{12} = \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \\ p_{21} &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2}, \\ p_{22} &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \alpha_1}.\end{aligned}\quad (3.1.14)$$

**Доказательство.** Аналогичным образом, как и для общего случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$  (лемма 3.3), вероятности перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , будут определяться в виде (3.1.5). Таким образом, подставляя (3.1.13) в (3.1.5), получим (3.1.14). *Лемма 3.7 доказана.*

**Лемма 3.8.** Условные финальные вероятности  $\pi_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ , в полусинхронном потоке событий второго порядка в случае  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\pi_1(0) &= \frac{\alpha_2[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2 - \lambda_2[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}, \\ \pi_2(0) &= \frac{(\lambda_1 + \alpha_1)[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2 - \lambda_2[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}, \\ \pi_1(0) + \pi_2(0) &= 1.\end{aligned}\tag{3.1.15}$$

**Доказательство.** Пользуясь равенствами (3.1.8), представленными для общего случая задания параметров потока (лемма 3.4) для условных финальных вероятностей  $\pi_i(0)$ ,  $i=1,2$ , подставляя в которые (3.1.14), приходим к (3.1.15).

*Лемма 3.8 доказана.*

Леммы 3.6 и 3.8 позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.2.** Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке событий второго порядка для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  имеет вид

$$p(\tau) = [(\lambda_1 + \alpha_1) - \pi_2(0)\alpha_2(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\tau)]e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0,\tag{3.1.16}$$

где  $\pi_2(0)$  определена в (3.1.15).

**Доказательство.** Подставляя выражения (3.1.15) и (3.1.13) в (3.1.10), после необходимых преобразований получим (3.1.16). *Теорема 3.2 доказана.*

### 3.1.3 Оценка параметров плотности вероятности для общего случая

С целью нахождения оценки параметров плотности  $p(\tau)$  для полусинхронного потока событий второго порядка воспользуемся методом моментов [50].

Рассмотрим статистики  $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности интервала между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$  наступления событий в потоке.

Пусть имеется выборка  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  из распределения  $p(\tau/z_1, z_2, \gamma)$ , которое зависит от трех неизвестных параметров  $z_1, z_2, \gamma$ . Пусть

$M(\tau^l) = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau/z_1, z_2, \gamma) d\tau = f_l(z_1, z_2, \gamma)$  – начальный теоретический момент  $l$ -го

порядка, который является функцией от неизвестных параметров. Тогда при

больших  $n$  он близок к соответствующему выборочному моменту – статистике

$C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$ . Для первых трех начальных теоретических моментов вместо приближенных равенств  $M(\tau^l) \approx C_l$  запишем точные, где вместо истинных параметров подставлены значения их оценок

$$f_l(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}) = C_l, \quad l = 1, 2, 3. \quad (3.1.17)$$

Учитывая вид плотности (3.1.9), получим выражения для начальных теоретических моментов:

$$M(\tau^l) = \frac{l! \gamma}{z_1^l} + \frac{l!(1-\gamma)}{z_2^l}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Тогда система уравнений моментов, с учетом системы равенств (3.1.17), примет следующий вид

$$\frac{\gamma}{z_1} + \frac{1-\gamma}{z_2} = C_1, \quad \frac{2\gamma}{z_1^2} + \frac{2(1-\gamma)}{z_2^2} = C_2, \quad \frac{6\gamma}{z_1^3} + \frac{6(1-\gamma)}{z_2^3} = C_3$$

или, после необходимых преобразований,

$$z_1 z_2 C_1 - z_2 \gamma - z_1 (1-\gamma) = 0, \quad (z_1 + z_2) C_1 - \frac{1}{2} z_1 z_2 C_2 = 1, \quad (z_1 + z_2) C_2 - \frac{1}{3} z_1 z_2 C_3 = 2C_1. \quad (3.1.18)$$

Решая систему уравнений (3.1.18), получим следующие соотношения для оценок параметров:

$$\hat{z}_1 + \hat{z}_2 = -\frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}, \quad \hat{z}_1 \hat{z}_2 = -\frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}.$$

Нетрудно заметить, что оценки  $\hat{z}_1$  и  $\hat{z}_2$  являются корнями квадратного уравнения:

$$z^2 + \frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} z - \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим оценки параметров плотности  $p(\tau)$ :

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{2(C_3 - 3C_1C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \pm \sqrt{\left( \frac{2(C_3 - 3C_1C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 + 4 \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}} \right). \quad (3.1.19)$$

Т.к.  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ , где  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ , а соотношение между параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  может быть произвольным, то произвольно и соотношение между  $z_1$  и  $z_2$ . Таким образом, для того, чтобы определить, какой корень из (3.1.19) может быть выбран в качестве оценки  $\hat{z}_1$  параметра  $z_1$ , а какой в качестве оценки  $\hat{z}_2$  параметра  $z_2$ , нужна дополнительная информация о потоке.

При этом должны выполняться неравенства

$$\frac{3C_1C_2 - C_3}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0, \quad \frac{2C_1^2 - C_2}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0, \quad \left( \frac{3C_1C_2 - C_3}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 + \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0.$$

Из первого уравнения системы (3.1.18) получим оценку параметра  $\gamma$ :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{z}_1(1 - C_1\hat{z}_2)}{\hat{z}_1 - \hat{z}_2}, \quad \hat{z}_2 \neq \hat{z}_1. \quad (3.1.20)$$

Далее представим плотность  $p(\tau)$  в виде

$$p(\tau) = \gamma(\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + (1 - \gamma)(\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0,$$

и решим задачу оценивания методом моментов параметров плотности  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , которые одновременно являются параметрами потока, при этом параметр  $\gamma$  считаем известным (известна оценка  $\hat{\gamma}$  в виде (3.1.20)).

Пусть имеем выборку  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  из распределения  $p(\tau/\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2)$ , которое зависит от четырех неизвестных параметров. Итак, для оценки  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$  необходимо иметь четыре уравнения моментов, т.е.  $M(\tau^l) = C_l, l = \overline{1,4}$ . В результате необходимых преобразований система уравнений моментов примет вид

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)C_1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\gamma - (\lambda_1 + \alpha_1)(1 - \gamma) &= 0, \\ ((\lambda_1 + \alpha_1) + (\lambda_2 + \alpha_2))C_1 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)C_2 &= 1, \\ ((\lambda_1 + \alpha_1) + (\lambda_2 + \alpha_2))C_2 - \frac{1}{3}(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)C_3 &= 2C_1, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

$$((\lambda_1 + \alpha_1) + (\lambda_2 + \alpha_2))C_3 - \frac{1}{4}(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)C_4 = 3C_2.$$

**Теорема 3.3.** Система (3.1.21) из четырех уравнений моментов относительно неизвестных параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$  полусинхронного потока событий второго порядка несовместна.

*Доказательство.* Систему (3.1.21) сведем к линейной неоднородной системе, выполнив следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_2 + \alpha_2 - \lambda_1 - \alpha_1, & x_2 &= \lambda_1 + \alpha_1, \\ x_3 &= \lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2, & x_4 &= (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2). \end{aligned}$$

Тогда система (3.1.21) примет вид

$$\gamma x_1 + x_2 - C_1 x_4 = 0, \quad C_1 x_3 - \frac{1}{2} C_2 x_4 = 1, \quad C_2 x_3 - \frac{1}{3} C_3 x_4 = 2C_1, \quad C_3 x_3 - \frac{1}{4} C_4 x_4 = 3C_2 \quad (3.1.22)$$

и имеет определитель, равный нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma & 1 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & C_1 & -C_2/2 \\ 0 & 0 & C_2 & -C_3/3 \\ 0 & 0 & C_3 & -C_4/4 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что среди определителей  $\Delta_i, i = \overline{1,4}$ , которые получаются из определителя  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов системы (3.1.22), имеются неравные нулю. Следовательно, система (3.1.22) не имеет решений, т.е. система несовместна. *Теорема 3.3 доказана.*

Из теоремы 3.3 следует, что оценить шесть параметров  $\lambda_i, \alpha_i, P_1^{(1)}(\lambda_j/\lambda_1), P_1^{(2)}(\lambda_j/\lambda_1), i, j = 1, 2$ , полусинхронного потока событий второго порядка, имея информацию только о плотности  $p(\tau)$ , тем более не представляется возможным.

### 3.1.4 Оценка параметров плотности вероятности для особого случая

Плотность (3.1.16) представим в следующем виде

$$p(\tau) = [z - a(1 - z\tau)]e^{-z\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (3.1.23)$$

где  $z = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $a = \pi_2(0)\alpha_2$ .

Рассмотрим статистики  $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности интервала между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$  наступления событий в потоке.

Пусть имеется выборка  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  из распределения  $p(\tau/z, a)$ , которое зависит от двух неизвестных параметров  $z, a$ . Пусть  $M(\tau^l) = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau/z, a) d\tau = \varphi_l(z, a)$  – начальный теоретический момент  $l$ -го порядка, который является функцией от неизвестных параметров. Тогда при больших  $n$  он близок к соответствующему выборочному моменту – статистике  $C_l$ . Для первых двух начальных теоретических моментов вместо приближенных равенств  $M(\tau^l) \approx C_l$  запишем точные, где вместо истинных параметров подставлены значения их оценок

$$\varphi_l(\hat{z}, \hat{a}) = C_l, \quad l = 1, 2. \quad (3.1.24)$$

Учитывая вид плотности (3.1.23), находим выражения для начальных теоретических моментов:

$$M(\tau^l) = \frac{l!}{z^l} \left[ 1 + a \frac{l}{z} \right], \quad l = 1, 2.$$

Тогда система уравнений моментов, с учетом равенств (3.1.24), примет следующий вид

$$\frac{1}{z^2} [z + a] = C_1, \quad \frac{2}{z^3} [z + 2a] = C_2. \quad (3.1.25)$$

Полученная система (3.1.25) сводится к квадратному уравнению  $C_2 z^2 - 4C_1 z + 2 = 0$ , решая которое, находим

$$\hat{z}^{(1)} = \frac{1}{C_2} (2C_1 - \sqrt{4C_1^2 - 2C_2}), \quad \hat{z}^{(2)} = \frac{1}{C_2} (2C_1 + \sqrt{4C_1^2 - 2C_2}). \quad (3.1.26)$$

При этом должны выполняться условия

$$\hat{z}^{(1)} \hat{z}^{(2)} = \frac{2}{C_2} > 0, \quad \hat{z}^{(1)} + \hat{z}^{(2)} = \frac{4C_1}{C_2} > 0, \quad 4C_1^2 - 2C_2 \geq 0.$$

Подставляя найденные оценки  $\hat{z}^{(1)}$  и  $\hat{z}^{(2)}$  в первое уравнение системы (3.1.25), получим

$$\hat{a}^{(1)} = C_1(\hat{z}^{(1)})^2 - \hat{z}^{(1)}, \quad \hat{a}^{(2)} = C_1(\hat{z}^{(2)})^2 - \hat{z}^{(2)}. \quad (3.1.27)$$

Естественно возникает вопрос о том, как осуществить выбор из пар  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  и  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  в качестве решения задачи. С учетом явного вида параметров  $z = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $a = \pi_2(0)\alpha_2$  и в силу условия  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  нетрудно показать, что оценки  $\hat{z}$  и  $\hat{a}$  параметров  $z$  и  $a$  должны удовлетворять условиям  $\hat{a} > 0$  и  $\hat{z} - \hat{a} > 0$ . В ходе аналитической проверки (представлено ниже) полученных пар  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  и  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  на выполнение указанных условий, сделаны следующие выводы: если  $\hat{a}^{(1)} > 0$ ,  $\hat{a}^{(2)} > 0$ ,  $\frac{C_2}{2} \leq C_1^2 < \frac{2C_2}{3}$ , то обе пары равноправны и в качестве оценки выбирается любая; если же справедливо  $\hat{a}^{(1)} > 0$ ,  $C_1^2 \geq \frac{2}{3}C_2$ , то в качестве решения задачи оценивания выбирается единственная пара  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$ .

*Аналитическая проверка пар  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  и  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  на выполнение условий  $\hat{a} > 0$  и  $\hat{z} - \hat{a} > 0$ .* Проверим полученные пары на выполнение указанных условий. Пара, удовлетворяющая условиям, выбирается в качестве решения задачи оценивания. Если обе пары удовлетворяют условиям, значит любая из пар может быть выбрана в качестве решения задачи, иными словами, пары равноправны.

Для начала проверим пару  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  на выполнение условия  $\hat{z}^{(1)} - \hat{a}^{(1)} > 0$ .

Подставляя выражение (3.1.26) для оценки  $\hat{z}^{(1)}$  в выражение (3.1.27) для  $\hat{a}^{(1)}$  и выполняя преобразования, получим

$$\hat{z} - \hat{a} = \frac{1}{C_2^2} (2C_1 - \sqrt{4C_1^2 - 2C_2})(2C_2 - 2C_1^2 + C_1\sqrt{4C_1^2 - 2C_2}).$$

Анализируя полученное выше выражение, можно сделать вывод, что если  $2C_2 - 2C_1^2 + C_1\sqrt{4C_1^2 - 2C_2} > 0$ , то проверяемое условие  $\hat{z}^{(1)} - \hat{a}^{(1)} > 0$  удовлетворяется.

Или, что тоже самое  $\sqrt{4C_1^2 - 2C_2} > 2C_1 - \frac{2C_2}{C_1}$ . Получили неравенство типа

$\sqrt{f(x)} > g(x)$ , которое сводится к решению двух систем неравенств:

$$\text{а) } g(x) \geq 0, f(x) > g^2(x), \quad \text{б) } g(x) < 0, f(x) \geq 0,$$

или в рассматриваемом случае

$$\text{а) } 2C_1 - \frac{2C_2}{C_1} \geq 0, 4C_1^2 - 2C_2 > \left(2C_1 - \frac{2C_2}{C_1}\right)^2, \quad \text{б) } 2C_1 - \frac{2C_2}{C_1} < 0, 4C_1^2 - 2C_2 \geq 0.$$

Решая систему б), получим  $C_2/2 \leq C_1^2 < C_2$ . Решая систему а), находим  $C_1^2 \geq C_2$ .

Таким образом, объединяя решения систем а) и б), делаем вывод, что если  $C_1^2 \geq C_2/2$ , то  $\hat{z}^{(1)} - \hat{a}^{(1)} > 0$  и пара  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  выбирается в качестве решения.

Для начала проверим пару  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  на выполнение условия  $\hat{z}^{(2)} - \hat{a}^{(2)} > 0$ .

Проводя аналогичные рассуждения, используя выражения (3.1.26) и (3.1.27) для  $\hat{z}^{(2)}$  и  $\hat{a}^{(2)}$ , приходим к выводу, что если  $\sqrt{4C_1^2 - 2C_2} < \frac{2C_2}{C_1} - 2C_1$ , то проверяемое условие

$\hat{z}^{(2)} - \hat{a}^{(2)} > 0$  удовлетворяется. Получили неравенство типа  $\sqrt{f(x)} < g(x)$ , которое сводится к решению системы неравенств вида

$$f(x) \geq 0, g(x) > 0, f(x) < g^2(x),$$

или в рассматриваемом случае

$$4C_1^2 - 2C_2 \geq 0, \frac{2C_2}{C_1} - 2C_1 > 0, 4C_1^2 - 2C_2 < \left(\frac{2C_2}{C_1} - 2C_1\right)^2.$$

Решая данную систему неравенств, получим, что если  $\frac{C_2}{2} \leq C_1^2 < \frac{2C_2}{3}$ , то  $\hat{z}^{(2)} - \hat{a}^{(2)} > 0$  и пара  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  выбирается в качестве решения.

Отметим, что аналитически проверить  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  и  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  на выполнение условия  $\hat{a} > 0$  не представляется возможным, проверка возможна только численно.

Таким образом, если  $\hat{a}^{(1)} > 0, \hat{a}^{(2)} > 0, \frac{C_2}{2} \leq C_1^2 < \frac{2C_2}{3}$ , то обе пары равноправны и в качестве оценки выбирается любая; если же справедливо  $\hat{a}^{(1)} > 0, C_1^2 \geq \frac{2}{3}C_2$ , то в качестве решения задачи оценивания выбирается единственная пара  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$ .

**Замечание 3.1.** Можно показать, что для особого случая задания параметров потока  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  система из трех и более уравнений моментов является несовместной.

Из замечания следует, что оценить параметры  $\lambda_i, \alpha_i, P_1^{(1)}(\lambda_j/\lambda_1), P_1^{(2)}(\lambda_j/\lambda_1)$ ,  $i, j = 1, 2$ , полусинхронного потока событий второго порядка для особого случая задания параметров потока  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ , имея информацию только о плотности  $p(\tau)$ , не представляется возможным.

### 3.2 Оценка параметров плотности распределения вероятностей в рекуррентном потоке

Исследуется полусинхронный поток событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости, математическое описание которого приведено в разделе 1.1.

В силу стационарного режима функционирования потока расположение одного интервала  $(t_k, t_{k+1})$  либо двух смежных интервалов  $(t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2})$  между моментами наступления событий потока  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  на временной оси может быть произвольным. Поэтому рассмотрим два соседних временных интервала  $(t_1, t_2), (t_2, t_3)$  со значениями длительностей интервалов  $\tau_1 = t_2 - t_1$  и  $\tau_2 = t_3 - t_2$  соответственно;  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ . При этом  $\tau_1 = 0$  соответствует моменту  $t_1$  наступления события потока;  $\tau_2 = 0$  соответствует моменту  $t_2$  наступления следующего события потока. Соответствующая при этом совместная плотность вероятности есть  $p(\tau_1, \tau_2), \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$  [71].

Требуется найти явный вид совместной плотности вероятности  $p(\tau_1, \tau_2)$  длительностей интервалов между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка для общего и особого случаев задания параметров потока. На основании вида  $p(\tau_1, \tau_2)$  найти условия рекуррентности потока, а также оценить параметры плотности вероятности для рекуррентного потока методом моментов для каждого из рассмотренных случаев задания параметров потока.

### 3.2.1 Вид совместной плотности вероятности длительностей интервалов между соседними событиями в потоке для общего случая задания параметров

**Теорема 3.4.** Полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным, и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$  имеет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \gamma(1-\gamma) \left( 1 - \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1} \right) \times \quad (3.2.1)$$

$$\times \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha_2} [z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}] [z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}],$$

где  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ ,  $\gamma$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $p(\tau_k)$  определены в (3.1.9) для  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2$ .

*Доказательство.* Последовательность моментов наступления событий потока  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , поэтому для  $p(\tau_1, \tau_2)$  справедливо

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_2). \quad (3.2.2)$$

Введем в рассмотрение следующую разность  $p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2)$ . Рассмотрим подробнее  $p(\tau_1)p(\tau_2)$ . С учетом (3.1.10) получим

$$p(\tau_1)p(\tau_2) = \left( \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_1) \right) \left( \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_2) \right).$$

Преобразуем данную формулу, расписав суммы и приводя подобные

$$p(\tau_1)p(\tau_2) = [\tilde{p}_{11}(\tau_2) + \tilde{p}_{12}(\tau_2)] \left( \pi_1^2(0) [\tilde{p}_{11}(\tau_1) + \tilde{p}_{12}(\tau_1)] + \pi_1(0)\pi_2(0) [\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \tilde{p}_{22}(\tau_1)] \right) + \quad (3.2.3)$$

$$+ [\tilde{p}_{21}(\tau_2) + \tilde{p}_{22}(\tau_2)] \left( \pi_2^2(0) [\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \tilde{p}_{22}(\tau_1)] + \pi_1(0)\pi_2(0) [\tilde{p}_{11}(\tau_1) + \tilde{p}_{12}(\tau_1)] \right).$$

Рассмотрим выражение (3.2.2) для совместной плотности вероятности. После упрощений получим

$$p(\tau_1, \tau_2) = [\tilde{p}_{11}(\tau_2) + \tilde{p}_{12}(\tau_2)] \left( \pi_1(0)\tilde{p}_{11}(\tau_1) + \pi_2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) \right) + \quad (3.2.4)$$

$$+ [\tilde{p}_{21}(\tau_2) + \tilde{p}_{22}(\tau_2)] \left( \pi_1(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2(0)\tilde{p}_{22}(\tau_1) \right).$$

Учитывая полученные выражения (3.2.3) и (3.2.4), проделывая необходимые преобразования, находим

$$p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2) = \sum_{k=1}^2 [\tilde{p}_{1k}(\tau_2) - \tilde{p}_{2k}(\tau_2)] \left( -\pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \pi_1(0)\pi_2(0)[\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)] \right). \quad (3.2.5)$$

В выражении (3.2.5) рассмотрим сумму разностей  $\sum_{k=1}^2 [\tilde{p}_{1k}(\tau_2) - \tilde{p}_{2k}(\tau_2)]$ , подставляя в которую выражения (3.1.2) для  $\tilde{p}_{ik}(\tau)$ ,  $i = 1, 2$ , при  $\tau = \tau_2$  и выполняя необходимые преобразования, имеем

$$\sum_{k=1}^2 [\tilde{p}_{1k}(\tau_2) - \tilde{p}_{2k}(\tau_2)] = \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} \left[ (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2} - (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_2} \right]. \quad (3.2.6)$$

Далее в (3.2.5) рассмотрим выражение в круглых скобках. С учетом (3.1.2) имеем

$$-\pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \pi_1(0)\pi_2(0)[\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)] = Ae^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} + Be^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_1}, \quad (3.2.7)$$

где введем следующие обозначения

$$A = -\pi_1^2(0)b - \pi_2^2(0)\frac{d\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} + \pi_1(0)\pi_2(0)d + \pi_1(0)\pi_2(0)\frac{b\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)},$$

$$B = \pi_2^2(0)\frac{d\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} - \pi_1(0)\pi_2(0)\frac{b\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} - \pi_1(0)\pi_2(0)\lambda_2,$$

$$d = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1), \quad b = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1).$$

Упростим  $A$  и  $B$  с учетом выражения для  $\gamma$ , определенного в (3.1.9).

Продельвая необходимые, достаточно трудоемкие, преобразования, находим

$$A = (\lambda_1 + \alpha_1)\gamma \frac{[\pi_2(0)d - \pi_1(0)b]}{(\lambda_1 + \alpha_1)}, \quad (3.2.8)$$

$$B = \frac{\pi_1(0)\pi_2(0)\lambda_2(\lambda_2 + \alpha_2 - d)}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)}.$$

Можно показать, что

$$\frac{[\pi_2(0)d - \pi_1(0)b]}{(\lambda_1 + \alpha_1)} = \frac{\pi_2(0)\lambda_2 d}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)},$$

$$\frac{\pi_1(0)(\lambda_2 + \alpha_2 - d)}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} = -\frac{d\gamma}{(\lambda_1 + \alpha_1)}.$$

Тогда формулы (3.2.8) запишутся в виде

$$A = (\lambda_1 + \alpha_1)\gamma \frac{\pi_2(0)\lambda_2 d}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)}, \quad B = -(\lambda_2 + \alpha_2)\gamma \frac{\pi_2(0)\lambda_2 d}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)}. \quad (3.2.9)$$

С учетом выписанных коэффициентов  $A$  и  $B$  в виде (3.2.9) выражение (3.2.7) принимает вид

$$\begin{aligned} & -\pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \pi_1(0)\pi_2(0)[\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)] = \\ & = \frac{\pi_2(0)\gamma d}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} \left[ (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} - (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_1} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Тогда (3.2.5), с учетом (3.2.6) и (3.2.10), запишется в виде

$$\begin{aligned} & p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2) = \\ & = \frac{(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)\pi_2(0)\gamma}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} \frac{d\lambda_2}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} \left[ (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} - (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_1} \right] \times \\ & \quad \times \left[ (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2} - (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Подставляя в (3.2.11) явные виды для  $1 - \gamma$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ , определенные в (3.1.9), и коэффициент  $d/(\lambda_1 + \alpha_1) = 1 - b/(\lambda_1 + \alpha_1)$ , с учетом введенных в ходе доказательства обозначений для  $d$ ,  $b$ , приходим к (3.2.1). *Теорема 3.4 доказана.*

### 3.2.2 Вид совместной плотности вероятности длительностей интервалов между соседними событиями в потоке для особого случая задания параметров

Рассмотрим случай, когда величина  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ .

**Теорема 3.5.** Полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2) &= p(\tau_1)p(\tau_2) - \frac{\lambda_2\pi_1(0)\pi_2(0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))}{\lambda_1 + \alpha_1} \times \\ & \quad \times (\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_1 + \tau_2)}, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

где  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ ,  $\pi_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ , определены в (3.1.6),  $p(\tau_k)$  определены в (3.1.16) для  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2$ .

*Доказательство.* В выражении (3.2.5) рассмотрим сумму разностей  $\sum_{k=1}^2 [\tilde{p}_{1k}(\tau_2) - \tilde{p}_{2k}(\tau_2)]$ , подставляя в которую выражения (3.1.13) для  $\tilde{p}_{ik}(\tau_2)$ ,  $i = 1, 2$ , определенные для особого случая задания параметров, и выполняя преобразования, получим

$$\sum_{k=1}^2 [\tilde{p}_{1k}(\tau_2) - \tilde{p}_{2k}(\tau_2)] = (\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2}. \quad (3.2.13)$$

Далее в (3.2.5) рассмотрим выражение в круглых скобках. С учетом (3.1.13) имеем

$$\begin{aligned} & -\pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \pi_1(0)\pi_2(0)[\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)] = \\ & = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} \left[ -\pi_1^2(0)b + \pi_2^2(0)d\tau_1(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) + \pi_1(0)\pi_2(0)(d - b\tau_1(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2) - \lambda_2) \right], \end{aligned}$$

или

$$-\pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \pi_1(0)\pi_2(0)[\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)] = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} [A + B\tau_1], \quad (3.2.14)$$

где

$$A = -\pi_1(0)b + \pi_1(0)\pi_2(0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2), \quad B = (\pi_2(0)d - \pi_1(0)\pi_2(0)(\lambda_1 + \alpha_1))(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2),$$

$$d = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1), \quad b = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1).$$

После необходимых преобразований находим

$$A = \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} [\pi_2(0)\{(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)d\pi_2(0) - (\lambda_1 + \alpha_1)b\pi_1(0)\} - \lambda_2 b\pi_1(0)\pi_2(0)],$$

$$B = \pi_2(0)\{(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)d\pi_2(0) - (\lambda_1 + \alpha_1)b\pi_1(0)\} + \lambda_2 b\pi_1(0)\pi_2(0).$$

Анализируя последние полученные выражения для  $A$  и  $B$ , замечаем, что обе формулы имеют равные фигурные скобки. С учетом выражений для  $\pi_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ , определенных в (3.1.6), и используя условие  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ , нетрудно показать, что справедливо

$$(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2)d\pi_2(0) - (\lambda_1 + \alpha_1)b\pi_1(0) = 0.$$

Тогда  $A$  и  $B$  примут следующий вид

$$A = -\frac{\lambda_2 b\pi_1(0)\pi_2(0)}{(\lambda_1 + \alpha_1)}, \quad B = \lambda_2 b\pi_1(0)\pi_2(0). \quad (3.2.15)$$

Таким образом, с учетом (3.2.14) и (3.2.15), имеем

$$\begin{aligned}
& -\pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) + \pi_1(0)\pi_2(0)[\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)] = \\
& = -\frac{\lambda_2\pi_1(0)\pi_2(0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1))}{\lambda_1 + \alpha_1} (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1}.
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Тогда выражение (3.2.5), с учетом формул (3.2.13), (3.2.16), примет вид (3.2.12). *Теорема 3.5 доказана.*

### 3.2.3 Условия рекуррентности потока для общего случая задания параметров

Рассмотрим случаи, когда поток становится рекуррентным. При этом для каждого из случаев запишем вид плотности исходя из выражения (3.1.9). Анализируя выражение (3.2.1), можно заметить, что совместная плотность факторизуется, т.е.  $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$ , если:

1.  $[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)]/(\lambda_1 + \alpha_1) = 1$ , при этом из (3.1.6) и (3.1.9) получим  $p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$ ,  $\tau \geq 0$ , где  $\gamma = -\alpha_2 / [(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)]$ ,  $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ ,  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)$ ;
2.  $\lambda_2 = 0$ , при этом  $p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$ ,  $\tau \geq 0$ , где  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \alpha_2$ ,  $\gamma = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) - \alpha_2] / (\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2)$ ;
3.  $\gamma = 0$ , при этом  $p(\tau) = z e^{-z \tau}$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $z = \lambda_2 + \alpha_2 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1)$ ;
4.  $1-\gamma = 0$ ; анализируя выражение для  $\gamma$  в (3.1.9), находим  $\pi_2(0) = 0$ , откуда следует  $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) = 0$ ; при этом  $p(\tau) = (\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ .

Покажем, что при выполнении одного из условий рекуррентности (1 или 2) факторизуется и  $n$ -мерная плотность  $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  для любого  $n > 2$ .

**Теорема 3.6.** Если справедливо  $[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)]/(\lambda_1 + \alpha_1) = 1$  (либо  $\lambda_2 = 0$ ), то

$$p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{k=1}^n p(\tau_k), \quad \tau_k \geq 0,$$

где  $p(\tau_k) = \gamma(\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_k} + (1-\gamma)(\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_k}$ ,  $\gamma = -\alpha_2 / [(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)]$  (либо  $p(\tau_k) = \gamma(\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_k} + (1-\gamma)\alpha_2 e^{-\alpha_2 \tau_k}$ ,  $\gamma = [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) - \alpha_2] / (\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2)$ ).

**Доказательство.** Доказано, что совместная плотность вероятности  $p(\tau_1, \tau_2)$  длительностей интервалов между соседними событиями потока факторизуется при выполнении  $[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1) = 1$  либо  $\lambda_2 = 0$ , т.е.  $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$  (утверждение теоремы выполняется для  $k = 2$ ). Воспользуемся методом математической индукции; положим  $k = n - 1$  и предположим, что  $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = p(\tau_1)p(\tau_2)\dots p(\tau_{n-1})$ .

Рассмотрим  $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ . Воспользуясь формулой условной вероятности и тем, что в моменты времени наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  последовательность  $\{\lambda(t_k)\}$  представляет собой вложенную цепь Маркова, получим

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n) &= p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})p(\tau_n / \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})p(\tau_n / \tau_{n-1}) = \\ &= p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \frac{p(\tau_{n-1}, \tau_n)}{p(\tau_{n-1})} = p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \frac{p(\tau_{n-1})p(\tau_n)}{p(\tau_{n-1})} = p(\tau_n)p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}). \end{aligned}$$

Воспользуясь индуктивным предположением, получим утверждение теоремы для  $k = n$ . Теорема 3.6 доказана.

В связи с тем, что условия 3, 4 определяют простейший поток событий с параметрами  $\lambda_2 + \alpha_2$  и  $\lambda_1 + \alpha_1$  соответственно, поставим задачу оценивания параметров плотности рекуррентного полусинхронного потока второго порядка в случаях 1 и 2.

### 3.2.4 Условия рекуррентности потока для особого случая задания параметров

Рассмотрим случаи, когда поток является рекуррентным. При этом для каждого из случаев запишем вид плотности исходя из выражения (3.1.16). Анализируя выражение (3.2.12), заметим, что совместная плотность факторизуется, т.е.  $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$ , если:

1.  $\lambda_2 = 0$ , при этом  $p(\tau) = [z - a(1 - z\tau)]e^{-z\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ , где  $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ ,  $z = \alpha_2$ ;

2.  $\pi_1(0) = 0$ ; учитывая выражение (3.1.6) для  $\pi_1(0)$ , имеем  $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0$ , при этом  $p(\tau) = [z - a(1 - z\tau)]e^{-z\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ , где  $z = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $a = \alpha_2$ ;

3.  $\pi_2(0) = 0$ ; учитывая выражение (3.1.6) для  $\pi_2(0)$ , имеем  $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0$ , при этом  $p(\tau) = ze^{-z\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ , где  $z = \lambda_1 + \alpha_1$ .

Для особого случая задания параметров потока  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  имеет место теорема, аналогичная теореме 3.6.

Поставим задачу оценивания параметров плотности распределения для рекуррентного потока, отличного от простейшего потока, т.е. для условий 1, 2.

### 3.2.5 Оценка параметров плотности в рекуррентном потоке для общего случая

Воспользуемся методом моментов с целью нахождения оценки параметров плотности  $p(\tau)$  для рекуррентного полусинхронного потока событий второго порядка.

Рассмотрим плотность рекуррентного потока:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad (3.2.17)$$

где параметры  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\gamma$  различны в зависимости от условия рекуррентности (1 или 2 раздела 3.2.3) для общего случая задания параметров потока.

Рассмотрим статистики  $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  — значение длительности интервала между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$  наступления событий в потоке.

Пусть имеется выборка  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  из распределения  $p(\tau / z_1, z_2, \gamma)$ , которое зависит от трех неизвестных параметров  $z_1, z_2, \gamma$ . Пусть  $M(\tau^l) = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau / z_1, z_2, \gamma) d\tau$  — начальный теоретический момент  $l$ -го порядка, который является функцией от неизвестных параметров. Тогда при  $n \rightarrow \infty$  он близок к соответствующему

выборочному моменту – статистике  $C_l$ . Для первых трех начальных моментов имеют место уравнения моментов:

$$M(\tau^l) = C_l, \quad l=1, 2, 3. \quad (3.2.18)$$

Учитывая вид плотности (3.2.17), получим

$$M(\tau^l) = l!\gamma/z_1^l + l!(1-\gamma)/z_2^l, \quad l=1, 2, 3.$$

Тогда система (3.2.18) после необходимых преобразований примет вид

$$\begin{aligned} z_1 z_2 C_1 - z_2 \gamma - z_1 (1 - \gamma) &= 0, \quad (z_1 + z_2) C_1 - z_1 z_2 C_2 / 2 = 1, \\ (z_1 + z_2) C_2 - z_1 z_2 C_3 / 3 &= 2C_1. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Решая систему уравнений (3.2.19), получим следующие соотношения для оценок параметров

$$\hat{z}_1 + \hat{z}_2 = -\frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}, \quad \hat{z}_1 \hat{z}_2 = -\frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}.$$

Заметим, что  $\hat{z}_1$  и  $\hat{z}_2$  являются корнями квадратного уравнения:

$$z^2 + \frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} z - \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} = 0,$$

решая которое, находим оценки параметров плотности  $p(\tau)$ :

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \pm \sqrt{\left( \frac{2(C_3 - 3C_1 C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \right)^2 + 4 \frac{6(C_2 - 2C_1^2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}} \right). \quad (3.2.20)$$

Условия существования действительных оценок  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$  аналогичны выписанным в подразделе 3.1.3 при решении задачи оценивания параметров плотности распределения вероятностей для коррелированного потока.

Т.к.  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$  (первое условие рекуррентности) и  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \alpha_2$  (второе условие рекуррентности), где  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ , а соотношение между параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  неизвестно, то для определения того, какой корень уравнения (3.2.20) может быть выбран в качестве оценки  $\hat{z}_1$ , а какой в качестве  $\hat{z}_2$ , нужна дополнительная информация о потоке.

Из первого уравнения системы (3.2.19) получим оценку параметра  $\gamma$ :

$$\hat{\gamma} = \hat{z}_1(1 - C_1\hat{z}_2)/(\hat{z}_1 - \hat{z}_2), \quad \hat{z}_2 \neq \hat{z}_1. \quad (3.2.21)$$

**Замечание 3.2.** Нетрудно показать, что при решении задачи оценивания параметров плотности простейшего потока (случаи рекуррентности 3 и 4 раздела 3.2.3) оценка искомого параметра будет равна  $1/C_1$ .

**Замечание 3.3.** Оценки параметров  $z_1, z_2, \gamma$  состоятельные, т.к.  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, k = 1, \dots, n$ , – взаимно независимые случайные величины, начальные теоретические моменты существуют и система уравнений моментов имеет единственное решение [50].

### 3.2.6 Оценка параметров плотности в рекуррентном потоке для особого случая

Рассмотрим плотность рекуррентного потока:

$$p(\tau) = [z - a(1 - z\tau)]e^{-z\tau}, \quad (3.2.22)$$

где параметры  $z, a$  различны в зависимости от условия рекуррентности (1 или 2 подраздела 3.2.4) для особого случая задания параметров потока.

Рассмотрим статистики  $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности интервала между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$  наступления соседних событий в потоке.

Пусть имеется выборка  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  из распределения  $p(\tau/z, a)$ , которое зависит от двух неизвестных параметров  $z, a$ . Пусть  $M(\tau^l) = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau/z, a) d\tau$  – начальный теоретический момент  $l$ -го порядка, который является функцией от неизвестных параметров. Тогда при  $n \rightarrow \infty$  он близок к соответствующему выборочному моменту – статистике  $C_l$ . Для первых двух начальных моментов имеют место уравнения моментов:

$$M(\tau^l) = C_l, \quad l = 1, 2. \quad (3.2.23)$$

Учитывая вид плотности (3.2.22), имеем

$$M(\tau^l) = \frac{l!}{z^l} \left[ 1 + a \frac{l}{z} \right], \quad l=1, 2.$$

Тогда система уравнений моментов (3.2.23) примет следующий вид

$$(z+a)/z^2 = C_1, \quad 2(z+2a)/z^3 = C_2, \quad a > 0, \quad z > 0. \quad (3.2.24)$$

Полученная система (3.2.24) сводится к квадратному уравнению

$C_2 z^2 - 4C_1 z + 2 = 0$ , решая которое, находим

$$\hat{z}^{(1)} = \left( 2C_1 - \sqrt{4C_1^2 - 2C_2} \right) / C_2, \quad \hat{z}^{(2)} = \left( 2C_1 + \sqrt{4C_1^2 - 2C_2} \right) / C_2, \quad 0 < \hat{z}^{(1)} < \hat{z}^{(2)}. \quad (3.2.25)$$

При этом должны выполняться следующие условия

$$\hat{z}^{(1)} \hat{z}^{(2)} = \frac{2}{C_2} > 0, \quad \hat{z}^{(1)} + \hat{z}^{(2)} = 4C_1 / C_2 > 0, \quad 4C_1^2 - 2C_2 \geq 0.$$

Подставляя полученные оценки  $\hat{z}^{(1)}$  и  $\hat{z}^{(2)}$  в первое уравнение системы (3.2.24), находим

$$\hat{a}^{(1)} = C_1 (\hat{z}^{(1)})^2 - \hat{z}^{(1)}, \quad \hat{a}^{(2)} = C_1 (\hat{z}^{(2)})^2 - \hat{z}^{(2)}. \quad (3.2.26)$$

Естественным образом возникает вопрос об осуществлении выбора из пар  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  и  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  в качестве решения задачи. С учетом явного вида параметров и в силу условия  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  нетрудно показать, что оценки  $\hat{z}$  и  $\hat{a}$  параметров  $z$  и  $a$  должны удовлетворять условиям  $\hat{a} > 0$  и  $\hat{z} - \hat{a} > 0$ . В ходе аналитической проверки, аналогичной той, которая представлена в разделе 3.1.4, полученных пар  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$  и  $\{\hat{z}^{(2)}, \hat{a}^{(2)}\}$  на выполнение указанных условий, сделаны следующие выводы.

Если  $\hat{a}^{(1)} > 0$ ,  $\hat{a}^{(2)} > 0$ ,  $C_2 / 2 \leq C_1^2 < 2C_2 / 3$ , то пары равноправны, и в качестве оценки выбирается любая; если справедливо  $\hat{a}^{(1)} > 0$  и  $C_1^2 \geq 2C_2 / 3$ , то в качестве решения задачи оценивания выбирается единственная пара  $\{\hat{z}^{(1)}, \hat{a}^{(1)}\}$ .

**Замечание 3.4.** Нетрудно показать, что при решении задачи оценивания параметров плотности простейшего потока (случай рекуррентности 3 раздела 3.2.4) оценка искомого параметра равна  $1/C_1$ .

### 3.3 Оценка длительности мертвого времени в наблюдаемом потоке

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , – значение длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока,  $p_T(\tau_k)$  – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. В силу того, что рассматривается стационарный режим функционирования потока,  $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$  для всех  $k=1, 2, \dots$ ,  $\tau \geq 0$ . Вследствие этого без ограничения общности момент наступления события  $t_k$  можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть  $\tau=0$ .

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени  $T$  методом моментов. Для решения поставленной задачи необходимо найти явный вид плотности вероятности  $p_T(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ .

#### 3.3.1 Вывод плотности вероятности $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал  $(0, \tau)$  длительности  $\tau = T + t$  между соседними событиями наблюдаемого потока, где  $T$  – значение длительности мертвого времени,  $t$  – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени и моментом наступления очередного события,  $t = \tau - T$ ,  $t > 0$ .

Введем переходную вероятность  $q_{ij}(T)$  того, что за мертвое время длительности  $T$  процесс  $\lambda(\tau)$  перейдет из состояния  $S_i$  в момент времени  $\tau=0$  в состояние  $S_j$  в момент  $\tau = T$ ,  $i, j=1, 2$ ; условную стационарную вероятность  $\pi_i(0/T)$  того, что процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau=0$  находится в состоянии  $S_i$ ,  $i=1, 2$ , при условии, что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности  $T$ .

Введем в рассмотрение условную вероятность  $p_{jk}(t)$  того, что на интервале  $(0, t)$  нет событий потока, и в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_k$  при условии, что в момент времени  $t=0$  значение процесса  $\lambda(0) = \lambda_j$ ;  $\tilde{p}_{jk}(t)$  – соответствующая плотность вероятности,  $j, k=1, 2$ .

В силу того, что процесс  $\lambda(t)$  обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать, начиная с момента времени  $t_k$ ,  $k=1,2,\dots$ , наступления события потока, плотность вероятности  $p_T(\tau)$  определяется в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0/T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau-T), \tau \geq T. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Явный вид плотностей вероятностей  $\tilde{p}_{jk}(\tau-T)$  определяется формулами (3.1.2), где вместо  $\tau$  нужно подставить  $\tau-T$ ; в свою очередь явный вид  $\pi_i(0/T)$ ,  $q_{ij}(T)$ ,  $i, j, k=1,2$ , устанавливаются следующие леммы.

**Лемма 3.9.** Переходные вероятности  $q_{ij}(T)$ ,  $i, j=1,2$ , в полусинхронном потоке событий второго порядка при наличии мертвого времени имеют вид

$$\begin{aligned} q_{11}(T) &= \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_2+a)T}, & q_{12}(T) &= \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_2+a)T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_2+a)T}, & q_{22}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_2+a)T}, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

где  $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ ; априорные финальные вероятности состояний  $S_1$  и  $S_2$  равны  $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a)$ ,  $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$  соответственно.

**Доказательство.** Построим систему дифференциальных уравнений для нахождения введенных переходных вероятностей  $q_{ij}(\tau)$ ,  $i, j=1,2$ :

$$\begin{aligned} q'_{11}(\tau) &= \alpha_2 q_{12}(\tau) - a q_{11}(\tau), & q'_{22}(\tau) &= a q_{21}(\tau) - \alpha_2 q_{22}(\tau), \\ q_{11}(\tau) + q_{12}(\tau) &= 1, & q_{21}(\tau) + q_{22}(\tau) &= 1, & q_{11}(0) &= q_{22}(0) = 1, & q_{12}(0) &= q_{21}(0) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений, с учетом начальных условий [86], и заменяя в решении момент времени  $\tau$  на  $T$ , приходим к (3.3.2).

*Лемма 3.9 доказана.*

**Лемма 3.10.** Условные стационарные вероятности  $\pi_i(0/T)$ ,  $i=1,2$ , в наблюдаемом потоке событий определяются выражениями:

$$\pi_1(0/T) = (z_1 - a) \left( \alpha_2 + \lambda_2 \pi_1 \left[ 1 - e^{-(\alpha_2+a)T} \right] \right) / \left( z_1 z_2 - \lambda_2 (z_1 - a) e^{-(\alpha_2+a)T} \right), \quad \pi_1(0/T) + \pi_2(0/T) = 1, \quad (3.3.3)$$

$z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;  $\pi_1$  и  $a$  определены в (3.3.2).

**Доказательство.** Введем в рассмотрение переходную вероятность  $\pi_{ij}(T)$  того, что за время, которое пройдет от момента  $\tau=0$  до момента наступления очередного события наблюдаемого потока, процесс  $\lambda(\tau)$  перейдет из состояния  $S_i$  в  $S_j$ ,  $i, j=1,2$ .

В моменты времени наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  последовательность  $\{\lambda(t_k)\}$  представляет собой вложенную цепь Маркова, тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_1(0/T) &= \pi_1(0/T)\pi_{11}(T) + \pi_2(0/T)\pi_{21}(T), \quad \pi_2(0/T) = \pi_1(0/T)\pi_{12}(T) + \pi_2(0/T)\pi_{22}(T), \\ \pi_1(0/T) + \pi_2(0/T) &= 1,\end{aligned}$$

из которой находим

$$\pi_1(0/T) = \pi_{21}(T)/(1 - \pi_{11}(T) + \pi_{21}(T)), \quad \pi_2(0/T) = 1 - \pi_1(0/T). \quad (3.3.4)$$

Поскольку процесс  $\lambda(t)$  является марковским, то справедливо

$$\begin{aligned}\pi_{11}(T) &= q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, \quad \pi_{12}(T) = q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, \quad \pi_{11}(T) + \pi_{12}(T) = 1, \\ \pi_{21}(T) &= q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \quad \pi_{22}(T) = q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \quad \pi_{21}(T) + \pi_{22}(T) = 1.\end{aligned}$$

Напомним, что  $p_{ij}$ ,  $i, j=1,2$ , есть вероятности перехода процесса  $\lambda(t)$  от момента окончания мертвого времени ( $t=0$ ) до момента наступления очередного события потока.

Учитывая выражения (3.3.2) для  $q_{ij}(T)$ ,  $i, j=1,2$ , получим

$$\begin{aligned}\pi_{11}(T) &= p_{11} - \pi_2(p_{11} - p_{21})(1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}), \quad \pi_{21}(T) = p_{21} + \pi_1(p_{11} - p_{21})(1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}), \\ \pi_{12}(T) &= 1 - \pi_{11}(T), \quad \pi_{22}(T) = 1 - \pi_{21}(T).\end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Подставляя в (3.3.4) выражения (3.3.5), (3.1.4) для вероятности перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j=1,2$ , приходим к (3.3.3). Лемма 3.10 доказана.

Леммы 3.2, 3.9, 3.10 позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.7.** Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$  имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T, \end{cases} \quad (3.3.6)$$

$$\gamma(T) = \pi_1 \left[ (z_1 - z_2 - a) / (z_1 - z_2) \right] \left( 1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(\alpha_2+a)T} - \lambda_2(z_1 - a)) \right),$$

где  $\pi_1$  и  $a$  определены в (3.3.2);  $z_1, z_2$  – в (3.3.3).

**Доказательство.** Подставляя выражения (3.1.2), (3.3.2) и (3.3.3) в формулу (3.54), после необходимых преобразований получим (3.3.6). *Теорема 3.7 доказана.*

Рассмотрим особый случай, когда в (3.1.2) величина  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ .

**Теорема 3.8.** Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, \tau \geq T, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 \left[ 1 + a\alpha_2 / ((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2+a)T} - \lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1 - a)) \right],$$

где  $\pi_2$  и  $a$  определены в (3.3.2).

**Доказательство.** Подставляя в (3.3.4) выражения (3.1.14) и (3.3.5) для вероятностей перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , находим стационарные вероятности  $\pi_i(0/T)$ ,

$$i = 1, 2: \pi_1(0/T) = 1 - \pi_2(0/T), \quad \pi_2(0/T) = \pi_2 \frac{((\lambda_1 + \alpha_1)^2 + a\alpha_2 - \lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1 - a)e^{-(\alpha_2+a)T})}{((\lambda_1 + \alpha_1)^2 - \lambda_2(z_1 - a)e^{-(\alpha_2+a)T})}.$$

Наконец, подставляя в (3.3.1) выражения (3.1.13) и (3.3.2) для плотностей вероятностей  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , а также найденные выражения для  $\pi_i(0/T)$ , в результате необходимых, достаточно трудоемких, преобразований приходим к (3.3.7). *Теорема 3.8 доказана.*

### 3.3.2 Оценивание длительности мертвого времени методом моментов

Рассмотрим статистику  $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности интервала между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$  наступления событий в наблюдаемом потоке.

Пусть имеется выборка  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  из распределения  $p_T(\tau)$ , зависящего от неизвестного параметра  $T$ ;  $M(\tau^l) = \int_T^\infty \tau^l p_T(\tau) d\tau$  – начальный теоретический момент первого порядка. Тогда, в соответствии с методом моментов, уравнение моментов выпишется в виде

$$M_T(\tau) = C. \quad (3.3.8)$$

С учетом вида (3.3.6) уравнение (3.3.8) для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$  запишется в виде

$$\gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2 = C. \quad (3.3.9)$$

Уравнение (3.3.9) относительно неизвестного параметра  $T$  решается только численно.

**Утверждение 3.1.** Уравнение моментов (3.3.9) имеет единственное решение.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $f(T)$ , где  $f(T) = M_T(\tau)$ . Покажем, что функция  $f(T)$  является возрастающей функцией переменной  $T$ ,  $T \geq 0$ . Имеем

$$f(T=0) = \frac{a + \alpha_2}{z_1 \alpha_2 + \lambda_2 a} > 0. \text{ Производная функции } f(T) \text{ по переменной } T, T \geq 0, \text{ равна}$$

$$f'(T) = 1 + \frac{\alpha_2 a (z_1 - \lambda_2)(z_1 - z_2 - a) e^{(a + \alpha_2)T}}{(z_1 z_2 e^{(a + \alpha_2)T} - \lambda_2 (z_1 - a))^2} > 0. \text{ Отсюда следует, что функция } f(T) \text{ –}$$

возрастающая функция переменной  $T$ ,  $T \geq 0$ . *Утверждение 3.1 доказано.*

Для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  уравнение (3.3.8), с учетом (3.3.7), примет следующий вид

$$T + 1/(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_2 \pi_2(T)/(\lambda_1 + \alpha_1)^2 = C. \quad (3.3.10)$$

Уравнение (3.3.10) решается относительно  $T$  с привлечением численных методов.

**Утверждение 3.2.** Уравнение моментов (3.3.10) имеет единственное решение.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\varphi(T) = M_T(\tau)$ , где  $\varphi(T) = T + 1/(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_2 \pi_2(T)/(\lambda_1 + \alpha_1)^2$ . Аналогично общему случаю можно показать,

что  $\varphi(T)$  – возрастающая функция переменной  $T, T \geq 0$ . Утверждение 3.2 доказано.

### 3.3.3 Среднее число потерянных событий в единицу времени

1. Случай  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$  ( $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1, z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ ) (общий). Плотность  $p_T(\tau)$  позволяет получить среднее число событий в единицу времени  $\Lambda$  в рассматриваемом потоке при полной его наблюдаемости ( $T = 0$ ), а также среднее число событий в единицу времени  $\Lambda_T$  в потоке при наличии мертвого времени ( $T \neq 0$ ):

$$\Lambda = z_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2,$$

$$\Lambda_T = \frac{z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)}{T(z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) + (z_2 \pi_1 + (z_1 + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

На основе полученных выражений находим среднее число потерянных событий в исходном потоке в единицу времени для *общего случая* задания параметров:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \left\{ \pi_2 (z_1 - \lambda_2) (\pi_1 (z_1 - \lambda_2) - \alpha_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] + T(z_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) (z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) \right\} \times$$

$$\times \left\{ T(z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) + (z_2 \pi_1 + (z_1 + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a) \right\}^{-1}.$$

(3.3.11)

2. Случай  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2 = z$  (особый). Аналогичным образом находятся величины  $\Lambda$  и  $\Lambda_T$ :

$$\Lambda = \lambda_2 + \alpha_2 \pi_1, \quad \Lambda_T = \frac{z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)}{T(z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)) + (z \pi_1 + (z + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

На основе полученных выражений находим среднее число потерянных событий в исходном потоке в единицу времени для *особого случая* задания параметров:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{-\alpha_2^2 \pi_2^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] + T(z \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) (z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a))}{T(z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)) + (z \pi_1 + (z + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}. \quad (3.3.12)$$

В (3.3.11) и (3.3.12) выражения для  $\pi_1, \pi_2$  и  $a$  определены в (3.3.2).

### 3.4 Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном наблюдаемом потоке

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – значение длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке,  $p_T(\tau_k)$  – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Рассматривается стационарный режим функционирования потока, тогда  $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\tau \geq 0$ . Как следствие, момент наступления события потока  $t_k$  без ограничения общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть  $\tau = 0$ . В силу стационарного режима функционирования потока расположение двух смежных интервалов  $(t_k, t_{k+1})$  и  $(t_{k+1}, t_{k+2})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , на временной оси произвольно. Тогда без ограничения общности  $\tau_1 = 0$  и  $\tau_2 = 0$  можно рассматривать как моменты наступления соседних событий в наблюдаемом потоке. При этом совместную плотность вероятности длительностей любых смежных интервалов обозначим  $p_T(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ .

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени  $T$  в рекуррентном наблюдаемом потоке событий методом моментов. Для решения поставленной задачи необходимо найти явный вид совместной плотности вероятности  $p_T(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ , с целью получения условий рекуррентности потока, и для каждого из установленных условий найти явный вид плотности вероятности  $p_T(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , в рекуррентном потоке.

#### 3.4.1 Вывод совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть  $\tau_1 = T + t^{(1)}$ ,  $\tau_2 = T + t^{(2)}$  – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления соседних событий в наблюдаемом потоке, где  $T$  – значение длительности мертвого времени,  $t^{(l)}$  – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом наступления очередного события наблюдаемого потока,  $t^{(l)} > 0$ ,  $l = 1, 2$ .

Рассмотрим один из двух смежных интервалов, значение длительности которого обозначим  $\tau = T + t$ ,  $t > 0$ .

Введем в рассмотрение переходную вероятность  $q_{ij}(T)$  того, что за мертвое время длительности  $T$  процесс  $\lambda(\tau)$  перейдет из состояния  $S_i$  в момент времени  $\tau = 0$  в состояние  $S_j$  в момент  $\tau = T$ ,  $i, j = 1, 2$ ; условную стационарную вероятность  $\pi_i(0/T)$  того, что процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau = 0$  находится в состоянии  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ , при условии, что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности  $T$ ; условную вероятность  $p_{ij}(t)$  того, что на интервале  $(0, t)$  нет событий потока, и в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_j$  при условии, что в момент времени  $t = 0$  значение процесса  $\lambda(0) = \lambda_i$ ;  $\tilde{p}_{ij}(t)$  – соответствующая плотность вероятности,  $i, j = 1, 2$ .

В силу того, что последовательность моментов наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , совместная плотность вероятности  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  определится в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0, \\ 0, & 0 \leq \tau_2 < T, \tau_1 \geq 0, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0/T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Явный вид  $\pi_i(0/T)$ ,  $q_{ij}(T)$ ,  $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T)$ ,  $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T)$ ,  $i, j, k, s, n = 1, 2$ , устанавливаются формулы (3.3.3), (3.3.2) и (3.1.2) соответственно; в последней формуле (3.1.2) вместо  $\tau$  нужно подставить  $\tau_1 - T$  либо  $\tau_2 - T$ . Тогда на основании лемм 3.2, 3.9, 3.10 и теоремы 3.7, определяющей плотность  $p_T(\tau)$ , сформулируем следующую теорему.

**Теорема 3.9** Полусинхронный поток событий второго порядка при наличии мертвого времени является коррелированным, и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$  имеет вид

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2) \times \\ \times \left[ z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)} \right] \left[ z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)} \right] e^{-(\alpha_2+a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \quad (3.4.2)$$

где вероятности  $p_T(\tau_k)$  для  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2$ , и  $\gamma(T)$  определены в (3.3.6);  $a$  – в (3.3.2);  $z_1, z_2$  – в (3.3.3).

**Доказательство.** Последовательно подставляя в (3.4.1) выражения (3.1.2), (3.3.2), (3.3.3), проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получим (3.4.2). Теорема 3.9 доказана.

Далее, опираясь на вышеполученные результаты, определим  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  в явном виде для *особого случая* задания параметров потока, когда величина  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ .

На основании лемм 3.6, 3.9, теоремы 3.8 сформулируем следующую теорему.

**Теорема 3.10.** Полусинхронный поток событий второго порядка при наличии мертвого времени является коррелированным, и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для случая  $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$  имеет вид

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) - \lambda_2(\alpha_2/z)^2(z-a)\pi_2^2(T) \times \\ \times [1 - z(\tau_1 - T)][1 - z(\tau_2 - T)] e^{-z(\tau_1 + \tau_2 - 2T)} e^{-(\alpha_2+a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \quad (3.4.3)$$

где  $z = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;  $p_T(\tau_k)$  для  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\pi_2(T)$  определены в (3.3.7); коэффициент  $a$  определен в (3.3.2).

**Доказательство.** Подставляя в (3.4.1) выражения (3.1.13), (3.3.2), учитывая доказательство теоремы 3.8 и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получим (3.4.3). Теорема 3.10 доказана.

### 3.4.2 Условия рекуррентности полусинхронного потока событий второго порядка при наличии мертвого времени

Рассмотрим случаи, когда наблюдаемый поток является рекуррентным; для каждого из случаев запишем вид плотности исходя из выражений (3.3.6), (3.3.7).

Для *общего случая*  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$  задания параметров потока из (3.4.2) следует, что совместная плотность факторизуется, т.е.  $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$ , если:

1)  $a/z_1 = 1$ , откуда следует  $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0$ ; тогда  $p_T(\tau) = \gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2e^{-z_2(\tau-T)}$ ,  $\tau \geq T$ , где  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ ,

$$\gamma(T) = -\frac{\pi_1 z_2}{z_1 - z_2} \left( 1 + \frac{z_1 - \lambda_2}{z_2 e^{(z_1 + \alpha_2)T}} \right), \quad \pi_1 = \alpha_2 / (z_1 + \alpha_2), \quad a \text{ определена в (3.3.2)};$$

2)  $\lambda_2 = 0$ , тогда  $p_T(\tau) = \gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2e^{-z_2(\tau-T)}$ ,  $\tau \geq T$ , где  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $z_2 = \alpha_2$ ,  $\gamma(T) = \frac{\pi_1(z_1 - \alpha_2 - a)}{z_1 - \alpha_2} \left( 1 + \frac{a}{\alpha_2 e^{(\alpha_2 + a)T}} \right)$ ,  $\pi_1 = \alpha_2 / (a + \alpha_2)$ ;

3)  $\gamma(T) = 0$ , тогда плотность  $p_T(\tau) = z_2e^{-z_2(\tau-T)}$ ,  $\tau \geq T$ ,  $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$ , определяет простейший поток с параметром  $\lambda_2 + \alpha_2$ ;

4)  $1 - \gamma(T) = 0$ , тогда плотность  $p_T(\tau) = z_1e^{-z_1(\tau-T)}$ ,  $\tau \geq T$ ,  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$ , определяет простейший поток с параметром  $\lambda_1 + \alpha_1$ .

Для *особого случая*  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$  задания параметров потока из (3.4.3) аналогичным образом находим, что совместная плотность факторизуется, т.е.  $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$ , если:

1)  $z - a = 0$ , откуда следует  $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0$ ; тогда  $p_T(\tau) = [z - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))]e^{-z(\tau-T)}$ ,  $\tau \geq T$ , где  $z = \lambda_1 + \alpha_1$ ,  $\pi_2(T) = \pi_2 \left( 1 + \frac{\alpha_2}{(\lambda_1 + \alpha_1)e^{(\alpha_2 + a)T}} \right)$ ,

$\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$ ,  $a$  определена в (3.3.2);

2)  $\lambda_2 = 0$ , тогда  $p_T(\tau) = z[1 - \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))]e^{-z(\tau-T)}$ ,  $\tau \geq T$ , где  $z = \lambda_1 + \alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\pi_2(T) = \pi_2 \left( 1 + \frac{a}{ze^{(\alpha_2 + a)T}} \right)$ ,  $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$ ,  $a$  определена в (3.3.2);

3)  $\pi_2(T) = 0$ , тогда плотность  $p_T(\tau) = ze^{-z(\tau-T)}$ ,  $\tau \geq T$ ,  $z = \lambda_1 + \alpha_1$ , определяет простейший поток с параметром  $\lambda_1 + \alpha_1$ .

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени  $T$  для рекуррентного потока при выполнении условий рекуррентности 1) и 2) в *общем случае* задания параметров, а также для условий рекуррентности 1) и 2) в *особом случае* задания параметров потока.

### 3.4.3 Оценивание длительности мертвого времени в рекуррентном наблюдаемом потоке методом моментов

Пусть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности интервала между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , наступления событий в наблюдаемом потоке. Введем статистику

$C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$  и рассмотрим  $M_T(\tau) = \int_T^{\infty} \tau p_T(\tau) d\tau$  – начальный теоретический момент

первого порядка. Тогда, в соответствии с методом моментов, уравнение моментов для определения неизвестного параметра  $T$  запишется в виде

$$M_T(\tau) = C. \quad (3.4.4)$$

В *общем случае* задания параметров потока, с учетом плотности, определенной для условий 1) и 2) рекуррентности наблюдаемого потока, уравнение (3.4.4) примет вид

$$\gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2 = C, \quad (3.4.5)$$

где  $z_1, z_2$  принимают значения, соответствующие выписанным условиям 1) и 2).

**Утверждение 3.3.** Уравнение моментов (3.4.5) для условий рекуррентности 1) и 2) имеет единственное решение.

Уравнение (3.4.4) для *особого случая* задания параметров потока, с учетом плотности, определенной для 1) и 2) условий рекуррентности наблюдаемого потока, запишется в виде

$$\alpha_2 \pi_2(T) / z^2 + T + 1/z = C, \quad (3.4.6)$$

где  $\pi_2(T) = \pi_2 \left( 1 + \alpha_2 / \left( z e^{(\alpha_2 + a)T} \right) \right)$  для условия 1);  $\pi_2(T) = \pi_2 \left( 1 + a / \left( \alpha_2 e^{(\alpha_2 + a)T} \right) \right)$  для условия 2).

**Утверждение 3.4.** Уравнение моментов (3.4.6) для условий рекуррентности 1) и 2) имеет единственное решение.

Доказательство утверждений 3.3 и 3.4 проводится аналогичным путем, приведенным в подразделе 3.3.2 для утверждений 3.1 и 3.2.

Полученные уравнения моментов (3.4.5) и (3.4.6) относительно неизвестного параметра  $T$  решаются только с привлечением численных методов.

**Замечание 3.5.** Оценка параметра  $T$  (длительность мертвого времени) как для общего случая задания параметров потока  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ , так и для особого случая  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$  является состоятельной, т.к.  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  – взаимно независимые случайные величины, начальный теоретический момент существует, и уравнение моментов имеет единственное решение [50].

### 3.4.4 Вероятностные характеристики потока

Поскольку теоремы 3.4, 3.5, 3.9 и 3.10 доказывают, что полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным, рассмотрим следующие вероятностные характеристики.

Для *общего случая* задания параметров потока при  $T=0$  ковариация и коэффициент корреляции имеют вид

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2,$$

$$r_{\tau_1, \tau_2} = \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 \left\{ -\gamma^2(1/z_1 - 1/z_2)^2 + 2\gamma \left( 1/z_1^2 - 1/(z_1 z_2) \right) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}.$$

В *особом случае* задания параметров потока ковариация и коэффициент корреляции при  $T=0$  определяются выражениями

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6,$$

$$r_{\tau_1, \tau_2} = -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(0) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(0) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}.$$

При  $T \neq 0$  ковариация и коэффициент корреляции для *общего случая* задания параметров имеют вид

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1-1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2+a)T}, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1-1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2+a)T} \times \\ &\times \left\{ -\gamma(T)^2(1/z_1-1/z_2)^2 + 2\gamma(T)\left(1/z_2^2 - 1/(z_1 z_2)\right) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

и для *особого случая* задания параметров потока

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2+a)T} / z^6, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2+a)T} / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(T) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(T) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что для рекуррентного потока как в общем случае задания параметров потока  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ , так и в особом случае  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$  при полной наблюдаемости потока ( $T=0$ ) имеем  $\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = 0$ ,  $r_{\tau_1, \tau_2} = 0$ ; при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности  $T$  ( $T \neq 0$ ) имеем  $\text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) = 0$ ,  $r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} = 0$ .

### 3.5 Выводы и результаты по третьей главе

В третьей главе диссертации:

– для общего и особого случаев задания параметров потока найден явный вид плотности вероятности  $p(\tau)$  длительности интервала между моментами наступления событий потока:

1) для полной наблюдаемости потока ( $T=0$ ) формула (3.1.9) при  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ , формула (3.1.16) при  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;

2) для частичной наблюдаемости потока ( $T \neq 0$ ) формула (3.3.6) при  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ , формула (3.3.7) при  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;

– приведен явный вид совместной плотности вероятности  $p(\tau_1, \tau_2)$  ( $p_T(\tau_1, \tau_2)$ ) длительностей смежных интервалов, что доказывает коррелированность полусинхронного потока событий второго порядка:

1) для полной наблюдаемости потока ( $T=0$ ) формула (3.2.1) при  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ , формула (3.2.12) при  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;

2) для частичной наблюдаемости потока ( $T \neq 0$ ) формула (3.4.2) при  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ , формула (3.4.3) при  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;

– выведены условия рекуррентности полусинхронного потока событий второго порядка:

1) для полной наблюдаемости потока ( $T = 0$ ) в разделе 3.2.3 для  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ , в разделе 3.2.4 для  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;

2) для частичной наблюдаемости потока ( $T \neq 0$ ) в разделе 3.4.2 для  $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ ,  $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ;

– в случае полной наблюдаемости потока ( $T = 0$ ) методом моментов решена задача оценивания параметров плотности распределения вероятностей для обоих рассматриваемых случаев задания параметров потока для коррелированного ((3.1.19), (3.1.20) – общий случай и (3.1.26), (3.1.27) – особый случай) и рекуррентного ((3.2.20), (3.2.21) – общий случай и (3.2.25), (3.2.26) – особый случай) потоков;

– в случае частичной наблюдаемости потока ( $T \neq 0$ ) получены уравнения моментов для оценивания длительности мертвого времени и доказана единственность решения выписанных уравнений для обоих рассматриваемых случаев задания параметров потока для коррелированного ((3.3.9) – общий случай и (3.3.10) – особый случай) и рекуррентного ((3.4.5) – общий случай и (3.4.6) – особый случай) потоков.

Таким образом, в третьей главе приведены явные формулы для оценки параметров распределения вероятностей в случае отсутствия мертвого времени ( $T = 0$ ); в случае наличия мертвого времени ( $T \neq 0$ ) приведены уравнения моментов, численное решение которых дает оценку длительности мертвого времени.

## 4 Результаты численных экспериментов на имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка

В данной главе диссертации приводятся результаты имитационного моделирования полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной либо частичной наблюдаемости. Проверка работоспособности и адекватности имитационной модели проведена в разделе 4.1.

В последующих разделах четвертой главы приводятся статистические эксперименты, поставленные для установления качества оценивания состояний потока (раздел 4.2) с использованием алгоритмов оптимального оценивания состояний потока, приведенных в подразделах 2.1.5 и 2.2.4, а также для установления качества оценок параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями (раздел 4.3) по явным формулам, полученным в подразделах 3.1.3., 3.1.4, 3.2.5 и 3.2.6.

Кроме того, приводится ряд экспериментов по оцениванию длительности мертвого времени (раздел 4.4) в рассматриваемом потоке путем численного решения уравнений моментов, полученных в подразделах 3.3.2 и 3.4.3.

Результаты главы опубликованы в работах [63, 65, 67–72, 114–117].

### 4.1 Проверка работоспособности модели

В данном разделе приведены результаты экспериментов, которые заключаются в сравнении поведения полусинхронного потока событий второго порядка при различных наборах параметров потока: интенсивностей, вероятностей перехода, длительности мертвого времени. Используемая имитационная модель рассматриваемого потока разработана и отлажена на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013.

В *первом эксперименте* показывается работоспособность построенной модели в условиях полной наблюдаемости потока, т.е. полагается значение длительности мертвого времени  $T=0$ . Пусть  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=0,8$ ,  $\alpha_1=2$ ,  $\alpha_2=0,9$ , время

наблюдения за потоком (время моделирования)  $T_m = 10$  ед. времени. Рассмотрим результаты имитационного моделирования при крайних значениях вероятностей перехода, т.е.

а) положим  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 1$  и  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0$ ;

б) положим  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 1$  и  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0$ .

Результаты данного эксперимента приведены в таблицах 4.1, 4.2. В строках приведенных таблиц указаны моменты времени наступления событий.

Таблица 4.1 – Результаты работы модели в случае а) первого эксперимента

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
0,3569	1,3563	2,0658	3,5841	4,7961	4,9855	7,1097	8,4376

Таблица 4.2 – Результаты работы модели в случае б) первого эксперимента

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$
1,4782	2,1383	2,9171	3,8475	4,2816	4,3958	4,7915	...	8,5242	8,9982	9,4485

На рисунках 4.1, 4.2 приведены реализации случайного процесса  $\lambda(t)$  для первого эксперимента.

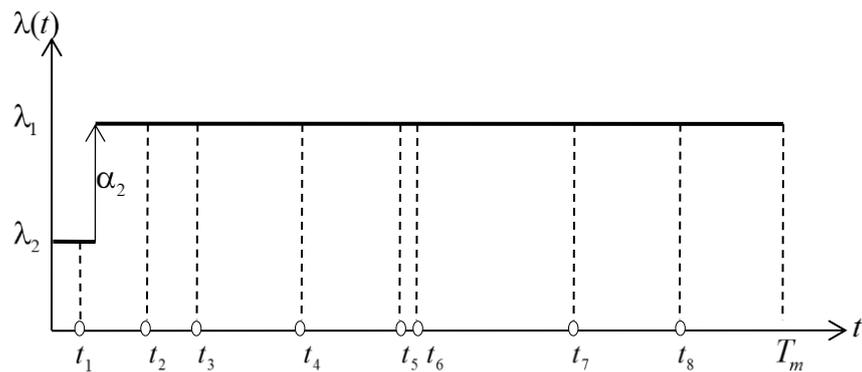


Рисунок 4.1 – Реализация полусинхронного потока событий второго порядка в случае а)

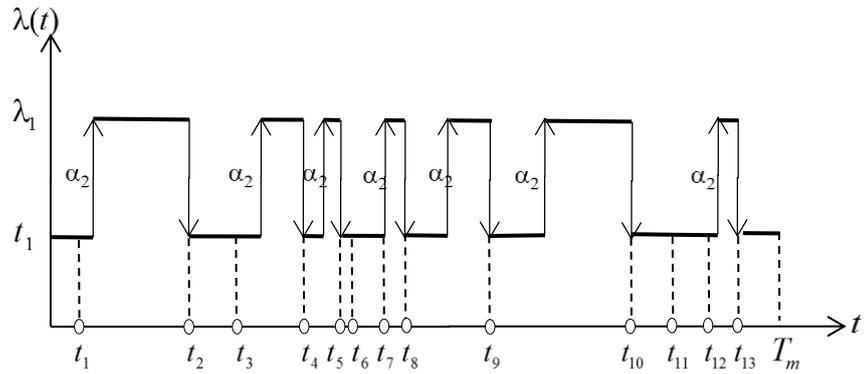


Рисунок 4.2 – Реализация полусинхронного потока событий второго порядка в случае b)

Как видно, в случае а), т.е. при  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 1$ , процесс  $\lambda(t)$ , попав в первое состояние  $S_1$ , в нем и остается, в отличие от случая b), где процесс  $\lambda(t)$ , находясь в состоянии  $S_1$ , при наступлении события потока с вероятностью единица переходит в состояние  $S_2$ .

Таким образом, при  $T=0$  имитационная модель полусинхронного потока событий второго порядка соответствует логике построенной математической модели потока.

Во *втором эксперименте* проверим работоспособность модели при частичной наблюдаемости потока ( $T \neq 0$ ) и положим  $\alpha_1=1$ ,  $\alpha_2=0,8$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ , время моделирования  $T_m = 10$  ед. времени, длительность мертвого времени  $T = 2$ . Рассмотрим результаты моделирования в следующих двух случаях: а)  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0,5$ ; б)  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Результаты эксперимента приведены в таблицах 4.3, 4.4, где в строках приведенных ниже таблиц указаны моменты наступления событий потока.

Таблица 4.3 – Результаты работы модели в случае а) второго эксперимента

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$
$t_{initial}$	0,3652	2,4587	3,5693	3,9556	4,7505	6,8275	7,8650	9,9108
	$t_1$	$t_2$			$t_5$	$t_6$		$t_8$
$t_{observed}$	0,3652	2,4587			4,7505	6,8275		9,9108

Здесь  $t_{initial}$  – моменты наступления событий исходного полусинхронного потока второго порядка,  $t_{observed}$  – моменты наступления событий наблюдаемого потока. В таблице 4.3 и далее в таблице 4.4 ненаблюдаемые (потерянные) моменты наступления событий исходного потока отмечены штриховкой.

Таблица 4.4 – Результаты работы модели в случае б) второго эксперимента

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	...	$t_{16}$
$t_{initial}$	0,4679	0,9563	1,3675	2,4810	2,6585	3,1915	3,7698	4,6512	...	9,8677
	$t_1$			$t_4$				$t_8$	...	$t_{16}$
$t_{observed}$	0,4679			2,4810				4,6512	...	9,8677

Заметим, что с увеличением интенсивности потока (таблица 4.4) количество событий полусинхронного потока второго порядка увеличилось. При этом период ненаблюдаемости исходного потока во втором случае больше, чем в первом, что является вполне естественным.

Таким образом, можно утверждать, что результаты моделирования демонстрируют работоспособность построенной модели.

На имитационной модели поставлены статистические эксперименты, которые демонстрируют ее адекватность.

*Первый статистический эксперимент* состоит из следующих этапов:

1) для фиксированного набора параметров, вероятностей переходов и длительности мертвого времени осуществляется моделирование полусинхронного потока событий второго порядка на отрезке времени длиной  $T_m$  ( $j$ -й опыт);

2) рассчитываются  $\hat{T}_i^{(j)}$ ,  $i = 1, 2$ , (для  $j$ -го опыта) – значения оценок длительностей пребывания процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_i$ ;

3) шаги 1,2 повторяются  $N$  раз ( $j = \overline{1, N}$ ).

Результат выполнения приведенного алгоритма – выборки значений оценок

$\hat{T}_i^{(j)}$ ,  $i = 1, 2$ , в  $N$  опытах,  $j = \overline{1, N}$ , по которым находятся выборочные средние длительностей пребывания процесса  $\lambda(t)$  в  $i$ -м состоянии  $\hat{T}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{T}_i^{(j)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Результаты первого статистического эксперимента приведены в таблицах 4.5, 4.6, а также проиллюстрированы на рисунках 4.3–4.6.

В рассматриваемом эксперименте при  $T_m = 100$ ,  $T = 1$ ,  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\alpha_1 = 4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$  устанавливается зависимость  $\hat{T}_1, \hat{T}_2$  от значений  $N = 50, \dots, 500$  с шагом 50. Рассмотрим результаты моделирования в следующих двух случаях: 1)  $\alpha_2 = 3$ ; 2)  $\alpha_2 = 0,5$ .

Таблица 4.5 – Результаты первого статистического эксперимента при  $\alpha_2 = 3$

$N$	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{T}_1$	65,02	63,19	64,22	62,77	63,28	64,2	64,35	64,32	64,62	64,33
$\hat{T}_2$	34,98	36,81	35,78	37,23	36,72	35,8	35,65	35,68	35,38	35,67

Таблица 4.6 – Результаты первого статистического эксперимента при  $\alpha_2 = 0,5$

$N$	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{T}_1$	25,11	26,01	24,72	23,61	25,44	24,37	24,56	24,42	24,61	24,63
$\hat{T}_2$	74,89	73,99	75,28	76,39	74,56	75,63	75,44	75,58	75,39	75,37

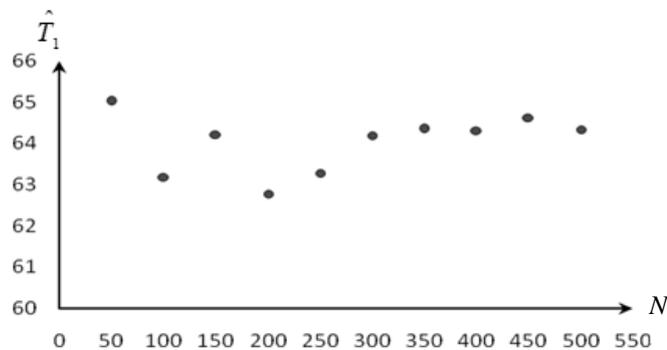


Рисунок 4.3 – График зависимости  $\hat{T}_1$  от значения  $N$  при  $\alpha_2 = 3$

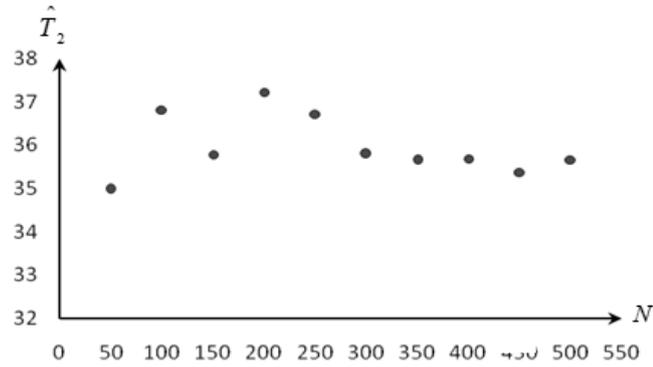


Рисунок 4.4 – График зависимости  $\hat{T}_2$  от значения  $N$  при  $\alpha_2 = 3$

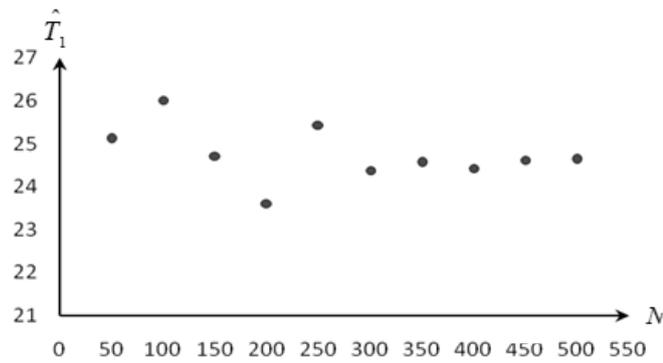


Рисунок 4.5 – График зависимости  $\hat{T}_1$  от значения  $N$  при  $\alpha_2 = 0,5$

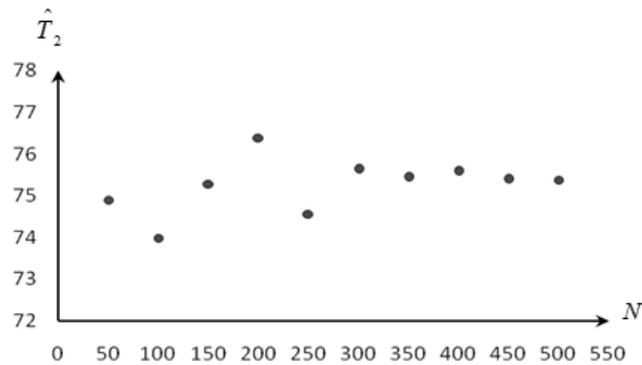


Рисунок 4.6 – График зависимости  $\hat{T}_2$  от значения  $N$  при  $\alpha_2 = 0,5$

Анализ численных результатов, приведенных в таблицах 4.5, 4.6, демонстрирует, что разброс значений оценок  $\hat{T}_1$ ,  $\hat{T}_2$  уменьшается с увеличением  $N$  для обоих рассматриваемых случаев, т.е.  $\hat{T}_1$ ,  $\hat{T}_2$  ведут себя более стабильно с ростом  $N$ . А также можно отметить увеличение значения оценки  $\hat{T}_2$  с уменьшением параметра  $\alpha_2$  (таблица 4.6), что является естественным в силу того, что при малых

значениях  $\alpha_2$  процесс  $\lambda(t)$  преимущественно находится в состоянии  $S_2$  для значений параметров, заданных выше.

Последнее подтверждает адекватность имитационной модели рассматриваемой математической модели дважды стохастического потока событий: полусинхронного потока событий второго порядка.

Во *втором статистическом эксперименте* осуществляется оценивание значения длительности интервала между событиями наблюдаемого потока в зависимости от значения длительности мертвого времени. Данный эксперимент состоит из следующих трех этапов:

1) для фиксированного набора параметров, вероятностей переходов и длительности мертвого времени моделируется рассматриваемый поток событий на отрезке времени длиной  $T_m$  ( $j$ -й опыт);

2) рассчитывается  $\hat{\tau}_j = (1/k_j) \sum_{i=1}^{k_j} \tau_i^{(j)}$  (для  $j$ -го опыта) – выборочное среднее значение длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока, где  $\tau_i^{(j)}$  – длительность  $i$ -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока,  $k_j$  – количество интервалов между событиями наблюдаемого потока в  $j$ -м опыте;

3) шаги 1,2 повторяются  $N$  раз ( $j=1, \dots, N$ ).

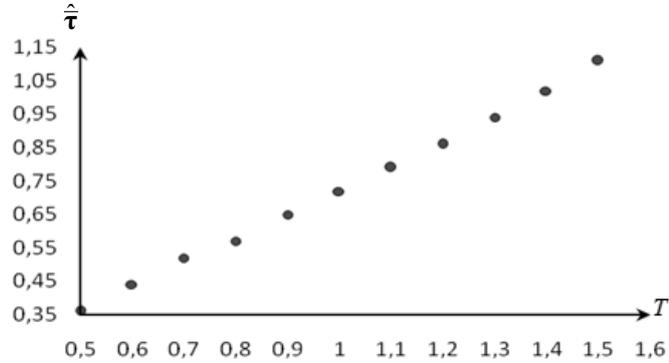
Результат выполнения приведенного алгоритма – выборка средних  $\hat{\tau}_j$  в  $N$  опытах,  $j=1, \dots, N$ , по которой находится оценка среднего  $\hat{\tau} = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{\tau}_j$ .

Результаты второго статистического эксперимента приведены в таблице 4.7 и проиллюстрированы на рисунке 4.7.

В настоящем эксперименте при  $T_m=100$ ,  $\lambda_1=4$ ,  $\lambda_2=2$ ,  $\alpha_1=4$ ,  $\alpha_2=2$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,6$  рассматривается зависимость  $\hat{\tau}$  от значений длительности мертвого времени  $T=0,5, \dots, 1,5$  с шагом 0,1.

Таблица 4.7 – Результаты второго статистического эксперимента

$T \backslash \hat{\tau}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\hat{\tau}$	0,36	0,44	0,52	0,57	0,65	0,72	0,79	0,86	0,94	1,02	1,11

Рисунок 4.7 – График зависимости  $\hat{\tau}$  от значения  $T$ 

Анализируя численные результаты, приведенные в таблице 4.7, а также их графическое представление на рисунке 4.7, можно сделать следующий вывод: оценка среднего  $\hat{\tau}$  увеличивается с увеличением длительности мертвого времени  $T$ , что соответствует физическим представлениям о влиянии мертвого времени на поток.

#### 4.2 Проверка качества оценки состояний потока

Для получения численных результатов проверки качества оценивания был разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  и проведены статистические эксперименты. На первом этапе алгоритма осуществляется имитационное моделирование потока в условиях его полной или частичной наблюдаемости. На втором этапе реализации алгоритма на основании полученной выборки моментов наступления наблюдаемых событий  $t_1, t_2, \dots$  производится вычисление апостериорных вероятностей  $w(\lambda_1/t), t_0 \leq t < t_1$ ;  $w(\lambda_1/t_k + 0), t_k < t \leq t_k + T$ ;  $w(\lambda_1/t), t_k + T < t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а также строятся реализации оценки  $\hat{\lambda}(t)$  истинного процесса  $\lambda(t)$ .

Для установления частоты принятия ошибочных решений о состоянии процесса  $\lambda(t)$  проведены статистические эксперименты, которые осуществляются по алгоритму:

1) для фиксированного набора параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, P_1^{(1)}(\lambda_j/\lambda_1), P_1^{(2)}(\lambda_j/\lambda_1), j = 1, 2, T$  (мертвое время) ед. времени осуществляется моделирование полусинхронного потока событий второго порядка на заданном отрезке времени  $[0, T_m]$  (отдельная  $i$ -я реализация (отдельный опыт)),  $T_m$  – время моделирования или время наблюдения за потоком;

2) рассчитываются апостериорные вероятности  $w(\lambda_1/t)$  ( $w(\lambda_2/t) = 1 - w(\lambda_1/t)$ ) на заданном отрезке времени  $[0, T_m]$ ;

3) осуществляется построение траектории оценки  $\hat{\lambda}(t)$  истинной траектории процесса  $\lambda(t)$  на заданном отрезке  $[0, T_m]$ ;

4) определяется значение  $d_i$  – интегральной протяженности интервалов времени, где значение оценки  $\hat{\lambda}(t)$  не совпадает с соответствующим истинным значением процесса  $\lambda(t)$ ;

5) производится вычисление доли ошибочных решений  $\hat{p}_i = d_i / T_m$ ;

6) для расчета оценки безусловной (полной) вероятности принятия ошибочного решения о состояниях процесса  $\lambda(t)$  на  $[0, T_m]$  шаги 1–5 повторяются  $N$  раз ( $i = \overline{1, N}$ ).

Результат выполнения алгоритма – выборка  $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N$  долей ошибочных решений в  $N$  опытах, по которой находятся выборочное среднее полной вероятности ошибочного решения  $\hat{P}_{ou} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$  и выборочная дисперсия

$$\hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_{ou})^2.$$

Для начала рассмотрим результаты оценивания состояний потока при его *полной наблюдаемости* ( $T = 0$ ).

На рисунке 4.8 проиллюстрирован пример одной из реализаций процесса  $\lambda(t)$ , а также соответствующая реализация его оценки  $\hat{\lambda}(t)$  на временном интервале  $[0, T_m]$ ,  $T_m = 10$ , для следующего набора параметров  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 0,8$  и вероятностей  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,6$ .

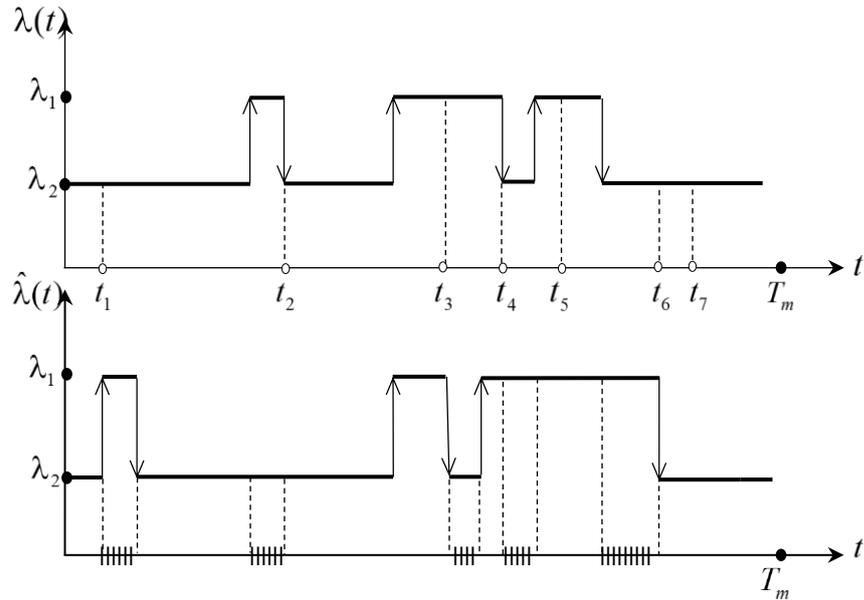


Рисунок 4.8 – Траектория процесса  $\lambda(t)$  и траектория оценки  $\hat{\lambda}(t)$

Заштрихованные области на оси времени нижнего графика на рисунке 4.8 – промежутки времени, на которых оценка не совпадает с истинным значением процесса  $\lambda(t)$ , т.е. это – области принятия ошибочных решений.

На рисунке 4.9 приведена траектория поведения апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  для данного случая.

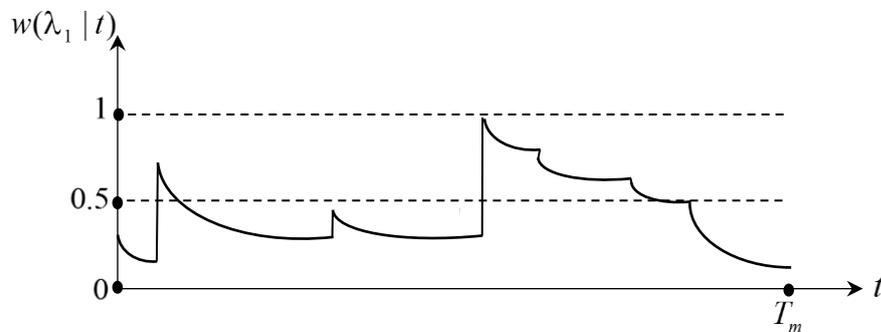


Рисунок 4.9 – Траектория апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$

В таблицах 4.8, 4.9 при фиксированном времени моделирования  $T_m = 100$  ед. времени и значениях  $N = 100$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 1$  приведены результаты *первого статистического эксперимента*. В таблице 4.8 оценки  $\hat{P}_{ou}$ ,  $\hat{D}$  получены для  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 0,8$  при изменяющемся параметре  $\lambda_1 = 2, 4, 6, 8$ ; в таблице 4.9 – для  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_2 = 0,8$  при изменяющемся параметре  $\alpha_1 = 2, 4, 6, 8$ .

Таблица 4.8 – Результаты первого статистического эксперимента при  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 0,8$

$\lambda_1$	2	4	6	8
$\hat{P}_{ou}$	0,3009	0,2189	0,1387	0,0350
$\hat{D}$	0,0029	0,0021	0,0009	0,0008

Таблица 4.9 – Результаты первого статистического эксперимента при  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_2 = 0,8$

$\alpha_1$	2	4	6	8
$\hat{P}_{ou}$	0,2961	0,1998	0,1197	0,0410
$\hat{D}$	0,0035	0,0024	0,0013	0,0013

Анализируя полученные численные результаты, приведенные в таблицах 4.8, 4.9, можно сделать следующие выводы. При увеличении параметра  $\lambda_1$  (таблица 4.8) оценка  $\hat{P}_{ou}$  уменьшается, что является естественным, так как условия различимости состояний процесса  $\lambda(t)$  улучшаются; при увеличении параметра  $\alpha_1$  (таблица 4.9) оценка  $\hat{P}_{ou}$  также уменьшается, так как условия различимости состояний процесса  $\lambda(t)$  улучшаются (процесс  $\lambda(t)$  преимущественно находится во втором состоянии).

В таблицах 4.10, 4.11, 4.12 при фиксированном времени моделирования  $T_m = 100$  ед. времени и значениях  $N = 100$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,

$P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$  приведены результаты второго статистического эксперимента. В таблице 4.10 оценки  $\hat{P}_{oui}$ ,  $\hat{D}$  получены для  $\lambda_2 = 0,1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , при изменяющемся параметре  $\lambda_1 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ ; в таблице 4.11 – для  $\lambda_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  при изменяющемся параметре  $\lambda_2 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ ; в таблице 4.12 – для  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 1$  при изменяющемся параметре  $\alpha_1 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ ;

Таблица 4.10 – Результаты второго статистического эксперимента ( $\lambda_2 = 0,1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ )

$\lambda_1$	0,2	0,4	0,6	0,8
$\hat{P}_{oui}$	0,1437	0,1206	0,1095	0,0629
$\hat{D}$	0,0015	0,0013	0,0008	0,0008

Таблица 4.11 – Результаты второго статистического эксперимента ( $\lambda_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ )

$\lambda_2$	0,2	0,4	0,6	0,8
$\hat{P}_{oui}$	0,0769	0,0992	0,1120	0,1307
$\hat{D}$	0,0008	0,0009	0,0013	0,0014

Анализируя полученные численные результаты, приведенные в таблицах 4.10, 4.11, можно сделать следующие выводы. Из таблицы 4.10 следует, что значение оценки  $\hat{P}_{oui}$  уменьшается. Последнее связано с тем, что:

- 1) увеличение значения  $\lambda_1$  приводит к увеличению интенсивности потока в состоянии  $S_1$ ;
- 2) увеличение значения  $\lambda_1$  влечет за собой увеличение частоты переходов из состояния  $S_1$  в  $S_2$  процесса  $\lambda(t)$ .

Эти два фактора влекут за собой улучшение различимости состояний.

Из таблицы 4.11 следует, что значение оценки  $\hat{P}_{ош}$  увеличивается. Это связано с тем, что увеличение значения  $\lambda_2$  приводит к увеличению интенсивности потока в состоянии  $S_2$ . Этот фактор отрицательно сказывается на условиях различимости состояний.

Таким образом, можно заключить, что результаты, приведенные в таблицах 4.8–4.11, согласуются с физическими представлениями о поведении значения оценки  $\hat{P}_{ош}$  в зависимости от изменяющихся параметров потока.

Далее рассмотрим результаты оценивания состояний потока при его *частичной наблюдаемости* ( $T \neq 0$ ).

Для наглядности на рисунке 4.10 приведена реализация случайного процесса  $\lambda(t)$ , полученная путем имитационного моделирования; на рисунке 4.11 показана соответствующая траектория оценки  $\hat{\lambda}(t)$ . Результаты получены для следующих значений параметров:  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=1$ ,  $\alpha_1=2$ ,  $\alpha_2=0,8$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1)=P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1)=0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1)=P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1)=0,6$ ;  $T=1$ ,  $T_m=10$  ед. времени.

Заштрихованные области на оси времени (рисунок 4.11) являются областями принятия ошибочных решений, т.е. это – промежутки времени, на которых полученная при моделировании оценка  $\hat{\lambda}(t)$  не совпадает с соответствующим истинным значением процесса  $\lambda(t)$ .

На рисунке 4.12 приведена соответствующая траектория апостериорной вероятности  $w(\lambda_1/t)$  для рассматриваемого случая.

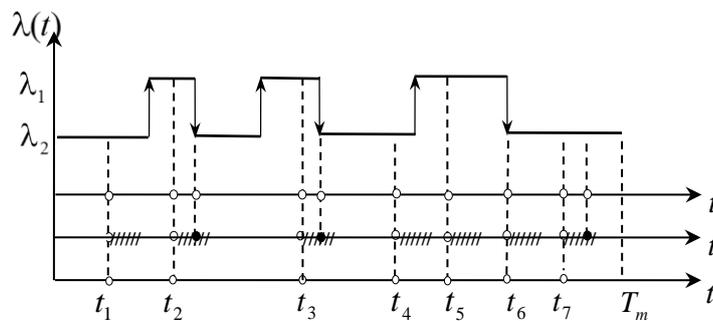
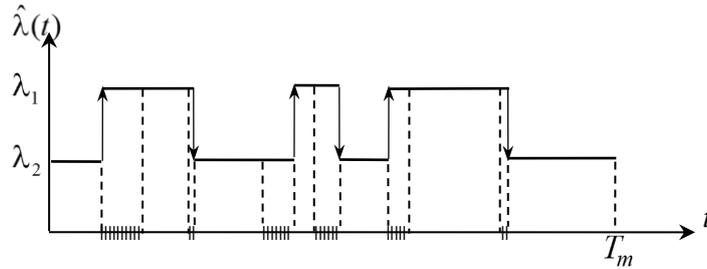
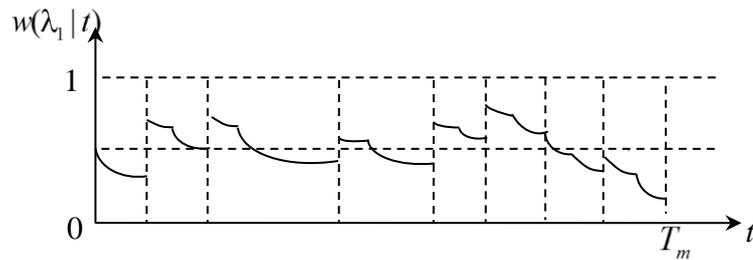


Рисунок 4.10 – Траектория процесса  $\lambda(t)$

Рисунок 4.11 – Траектория оценки  $\hat{\lambda}(t)$ Рисунок 4.12 – Траектория апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 / t)$ 

В третьем статистическом эксперименте рассматривается зависимость  $\hat{P}_{ou}$ ,  $\hat{D}$  от значения длительности мертвого времени  $T = 0, 1, \dots, 6$  ед. времени. Результаты эксперимента приведены в таблицах 4.12–4.14 при  $T_m = 100$  ед. времени,  $N = 100$  и параметрах  $\lambda_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 1$ , вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_1 / \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 / \lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2 / \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 / \lambda_1) = 0,6$ . При этом в каждой из последующих таблиц настоящего эксперимента значение разности  $\lambda_1 - \lambda_2$  увеличивается на 50% по сравнению с предыдущей.

Таблица 4.12 – Результаты третьего статистического эксперимента при  $\lambda_1 - \lambda_2 = 3$  ( $\lambda_1 = 4$ )

$T$	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{ou}$	0,1581	0,2373	0,2599	0,2761	0,2880	0,2946	0,2989
$\hat{D}$	0,0018	0,0026	0,0030	0,0035	0,0039	0,0041	0,0044

Таблица 4.13 – Результаты третьего статистического эксперимента при  $\lambda_1 - \lambda_2 = 4,5$   
( $\lambda_1 = 5,5$ )

$T$	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{ou}$	0,1301	0,1915	0,2223	0,2463	0,2585	0,2676	0,2697
$\hat{D}$	0,0015	0,0022	0,0027	0,0033	0,0037	0,0041	0,0042

Таблица 4.14 – Результаты третьего статистического эксперимента при  $\lambda_1 - \lambda_2 = 6,75$   
( $\lambda_1 = 7,75$ )

$T$	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{ou}$	0,0929	0,1554	0,1901	0,2157	0,2284	0,2391	0,2412
$\hat{D}$	0,0010	0,0019	0,0022	0,0029	0,0030	0,0035	0,0038

Анализ численных результатов показывает уменьшение значения оценки  $\hat{P}_{ou}$  с увеличением значения разности  $\lambda_1 - \lambda_2$  при фиксированном значении  $T$ , что является естественным в силу лучшей различимости состояний потока. Стоит отметить, что чем больше значение длительности мертвого времени  $T$ , тем меньше темп улучшения качества оценивания при увеличении значения  $\lambda_1 - \lambda_2$ . При этом при фиксированных параметрах потока с ростом  $T$  качество оценивания состояний ухудшается в силу того, что происходит увеличение потерь информации о потоке (события теряются). Отметим, что при  $T \rightarrow \infty$  апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 / t)$  стремится к априорной финальной вероятности  $\pi_1$  первого состояния процесса  $\lambda(t)$ , что является вполне понятным, т.к. периоды наблюдаемости потока в данном случае отсутствуют (этот факт подтверждается формулой 2.2.3).

Заметим, что при данных значениях параметров алгоритм оптимального оценивания состояний потока обеспечивает достаточно приемлемую оценку безусловной вероятности ошибочного решения, причем значение выборочной

дисперсии оценки мало.

В четвертом статистическом эксперименте при  $N=100$ ,  $T_m=100$  ед. времени и параметрах потока  $\lambda_1=4$ ,  $\lambda_2=0,8$ ,  $\alpha_2=0,8$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1)=P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1)=0$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1)=P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1)=1$  устанавливается зависимость оценки  $\hat{P}_{ou}$  от значений параметра  $\alpha_1=4, \dots, 10$  с шагом 0,5. Результаты эксперимента отражены на рисунке 4.13.

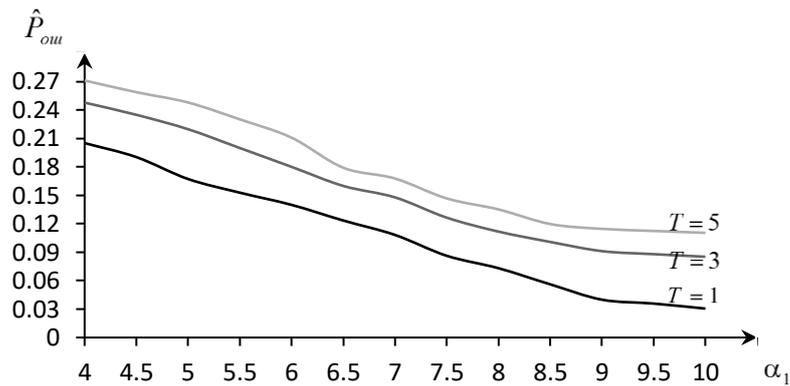


Рисунок 4.13 – График зависимости  $\hat{P}_{ou}$  от  $\alpha_1$  при  $T=1$ ,  $T=3$ ,  $T=5$

Анализируя полученные результаты, заключаем, что качество оценивания улучшается с ростом значения параметра  $\alpha_1$  (в силу лучшей различимости состояний при больших значениях  $\alpha_1$ ) при неизменных других значениях параметров потока; также можно отметить заметное ухудшение качества оценивания при увеличении значения длительности мертвого времени  $T$  (в силу увеличения потерь событий потока при больших значениях  $T$ ).

### 4.3 Проверка качества оценки параметров плотности распределения

С целью установления качества оценивания параметров плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке разработан алгоритм вычисления оценок параметров плотности, который состоит из двух этапов. На первом этапе реализации алгоритма производится имитационное моделирование полусинхронного потока событий второго порядка.

На втором этапе непосредственно вычисляются значения оценок параметров по полученным формулам.

Для начала рассмотрим случай оценивания параметров плотности в *коррелированном* потоке, который изучен в разделе 3.1.

Рассмотрим *общий случай* ( $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ ) задания параметров потока, для которого вычисляются значения оценок  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$ ,  $\hat{\gamma}$  по формулам (3.1.19), (3.1.20), а

также находятся выборочные средние  $\hat{M}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}^{(k)}$  и оценки смещения

$$\delta(\theta) = \left| \hat{M}(\hat{\theta}) - \theta \right|, \text{ где } \theta \in \{z_1, z_2, \gamma\}, \hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}.$$

В *первом статистическом эксперименте* рассматривается зависимость  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\delta(\theta)$  от значений параметра  $\lambda_1 = 2, 3, 4, 5, 6$  при времени моделирования  $T_m = 700$  ед. времени,  $N = 100$ , вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$  а также параметрах потока  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 2$ . Результаты данного эксперимента приведены в таблицах 4.15–4.17.

В приведенных ниже таблицах нижняя строка содержит истинное значение оцениваемого параметра.

Таблица 4.15 – Результаты первого статистического эксперимента по оценке  $z_1$

$\lambda_1$	2	3	4	5	6
$\hat{M}(\hat{z}_1)$	4,3298	5,2167	6,1552	7,0959	8,0483
$\delta(z_1)$	0,3298	0,2167	0,1552	0,0959	0,0483
$z_1$	4	5	6	7	8

Таблица 4.16 – Результаты первого статистического эксперимента по оценке  $z_2$

$\lambda_1$	2	3	4	5	6
$\hat{M}(\hat{z}_2)$	3,1902	3,0743	3,0377	2,9545	2,9151
$\delta(z_2)$	0,3902	0,2743	0,2377	0,1545	0,1151
$z_2$	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8

Таблица 4.17 – Результаты первого статистического эксперимента по оценке  $\gamma$ 

$\lambda_1$	2	3	4	5	6
$\hat{M}(\hat{\gamma})$	0,3621	0,3393	0,3291	0,2909	0,2717
$\delta(\gamma)$	0,2510	0,1846	0,1513	0,0989	0,0701
$\gamma$	0,1111	0,1547	0,1778	0,1920	0,2016

Во втором статистическом эксперименте рассматривается зависимость  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\delta(\theta)$  от значений параметра  $\alpha_1 = 2, 3, 4, 5, 6$  при  $T_m = 700$  ед. времени,  $N = 100$ , вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ , а также параметрах потока  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_2 = 0,8$ . Результаты эксперимента приведены в таблицах 4.18–4.20.

Таблица 4.18 – Результаты второго статистического эксперимента по оценке  $z_1$ 

$\alpha_1$	2	3	4	5	6
$\hat{M}(\hat{z}_1)$	4,3502	5,2681	6,1798	7,1102	8,0611
$\delta(z_1)$	0,3502	0,2681	0,1798	0,1102	0,0611
$z_1$	4	5	6	7	8

Таблица 4.19 – Результаты второго статистического эксперимента по оценке  $z_2$ 

$\alpha_1$	2	3	4	5	6
$\hat{M}(\hat{z}_2)$	1,9802	1,9213	1,8103	1,7699	1,7145
$\delta(z_2)$	0,3802	0,3213	0,2103	0,1699	0,1145
$z_2$	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6

Таблица 4.20 – Результаты второго статистического эксперимента по оценке  $\gamma$ 

$\alpha_1$	2	3	4	5	6
$\hat{M}(\hat{\gamma})$	0,3578	0,3788	0,3968	0,3978	0,3851
$\delta(\gamma)$	0,2467	0,1801	0,1489	0,1183	0,0834
$\gamma$	0,1111	0,1987	0,2479	0,2795	0,3017

Результаты первого и второго статистических экспериментов проиллюстрированы на рисунке 4.14, где поведение  $\delta(z_1)$  обозначено серым маркером,  $\delta(z_2)$  – черным,  $\delta(\gamma)$  – белым.

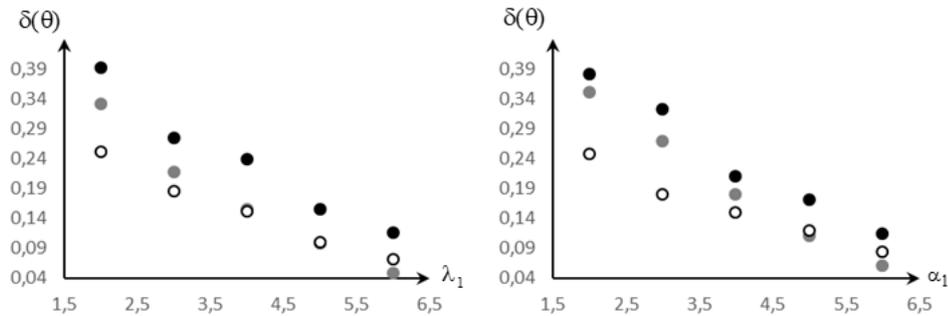


Рисунок 4.14 – График зависимости  $\delta(\theta)$ ,  $\theta \in \{z_1, z_2, \gamma\}$ , от значений параметра  $\lambda_1$  (слева) и от значений  $\alpha_1$  (справа)

Проводя анализ полученных численных результатов, приведенных в таблицах 4.15–4.20 и проиллюстрированных на рисунке 4.14, можно сделать следующие выводы.

Имеет место смещение полученных оценок на величину  $\delta(\theta)$ ,  $\theta \in \{z_1, z_2, \gamma\}$ , относительно исходных значений оцениваемых параметров. С увеличением параметра  $\lambda_1$  (таблицы 4.15–4.17) смещение  $\delta(\theta)$  уменьшается. Это связано с тем, что частота переходов из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе увеличивается с ростом  $\lambda_1$ , что положительно сказывается на условиях различимости состояний. Другими словами, сближение значений параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательно

сказывается на условиях различимости состояний, поэтому  $\delta(\theta)$  имеет большие значения при уменьшении разности  $\lambda_1 - \lambda_2$ .

При увеличении параметра  $\alpha_1$  (таблицы 4.18–4.20) смещение  $\delta(\theta)$  заметно уменьшается, что также объясняется увеличением частоты смены состояний: первого состояния процесса  $\lambda(t)$  на второе.

Рассмотрим *особый случай* ( $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ) задания параметров потока. Для него вычисляются значения оценок  $\hat{z}$ ,  $\hat{a}$  по формулам (3.1.26), (3.1.27), а также находятся выборочные средние  $\hat{M}(\hat{\theta})$  и оценки смещения  $\delta(\theta) = |\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$ , где  $\theta \in \{z, a\}$ ,  $\hat{\theta} \in \{\hat{z}, \hat{a}\}$ .

В *третьем статистическом эксперименте* рассматривается зависимость  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\delta(\theta)$  от значений времени моделирования  $T_m$  при фиксированных  $N=100$ , вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,65$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,35$ , параметрах потока  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 1,5$ ,  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = 3$ . Результаты эксперимента приведены в таблицах 4.21, 4.22, а также отражены на рисунке 4.15, где эволюция  $\hat{M}(\hat{\theta})$  показана пунктирной линией, а поведение истинного значения параметра – сплошной.

Таблица 4.21 – Результаты третьего статистического эксперимента по оценке  $z$

$T_m$	50	100	150	200	...	900	950	1000
$\hat{M}(\hat{z})$	4,8894	4,7864	4,7664	4,7463	...	4,5398	4,5397	4,5388
$\delta(z)$	0,3894	0,2864	0,2664	0,2463	...	0,0398	0,0397	0,0388
$z$	4,5	4,5	4,5	4,5	...	4,5	4,5	4,5

Таблица 4.22 – Результаты третьего статистического эксперимента по оценке  $a$

$T_m$	50	100	150	200	...	900	950	1000
$\hat{M}(\hat{a})$	1,6402	1,5211	1,4984	1,4698	...	1,3777	1,3775	1,3769
$\delta(a)$	0,2998	0,1807	0,1580	0,1294	...	0,0373	0,0371	0,0365
$a$	1,3404	1,3404	1,3404	1,3404	...	1,3404	1,3404	1,3404

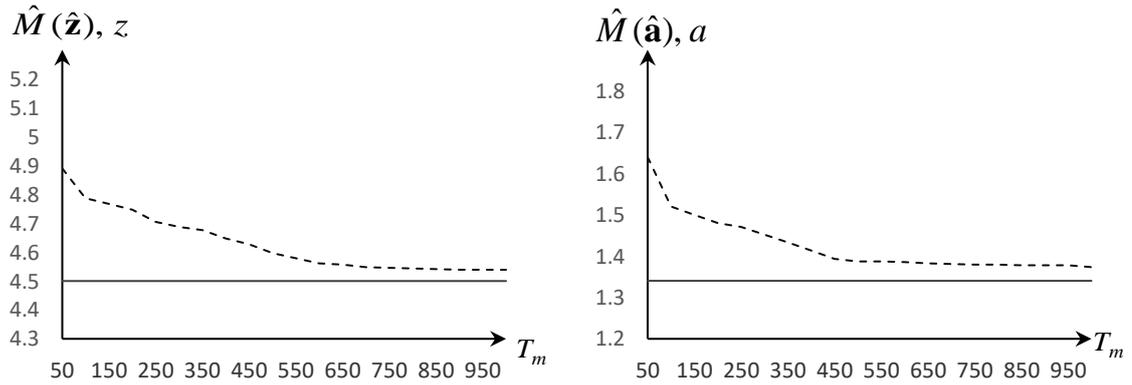


Рисунок 4.15 – Зависимость  $\hat{M}(\hat{z}), z$  (слева) и  $\hat{M}(\hat{a}), a$  (справа) от значений  $T_m$

Анализ полученных численных результатов, приведенных в таблицах 4.21, 4.22 и на рисунке 4.15, показывает, что смещение  $\delta(\theta)$ ,  $\theta \in \{z, a\}$ , уменьшается с увеличением времени моделирования  $T_m$ , что является вполне естественным. Другими словами, качество оценивания параметров плотности тем лучше (в смысле уменьшения смещения оценок), чем больше время моделирования  $T_m$ . Также отметим, что время нахождения процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии больше, чем во втором в силу особого задания вероятностей перехода и параметров потока.

В четвертом статистическом эксперименте рассматривается зависимость  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\delta(\theta)$  от значений параметра  $\lambda_1 = 2, 3, 4, 5, 6$  при  $T_m = 700$  ед. времени,  $N = 100$ , вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ , параметрах потока  $\lambda_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0,8$ . При этом параметр  $\alpha_2$  рассчитывается по формуле  $\alpha_2 = \lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2$ . Результаты данного эксперимента приведены в таблицах 4.23, 4.24.

Таблица 4.23 – Результаты четвертого статистического эксперимента по оценке  $z$

$\lambda_1$	2	3	4	5	6
$\alpha_2$	1,8	2,8	3,8	4,8	5,8
$\hat{M}(\hat{z})$	3,1823	3,9902	4,9281	5,8682	6,8279
$\delta(z)$	0,3823	0,1902	0,1281	0,0682	0,0279
$z$	2,8	3,8	4,8	5,8	6,8

Таблица 4.24 – Результаты четвертого статистического эксперимента по оценке  $a$ 

$\lambda_1$	2	3	4	5	6
$\alpha_2$	1,8	2,8	3,8	4,8	5,8
$\hat{M}(\hat{a})$	1,5620	1,9810	2,4835	3,0254	3,5955
$\delta(a)$	0,3942	0,2133	0,1165	0,0592	0,0299
$a$	1,1678	1,7677	2,3670	2,9662	3,5656

Анализируя полученные численные результаты, приведенные в таблицах 4.23, 4.24, можно сделать следующие выводы. С увеличением значения параметра  $\lambda_1$ ,  $a$ , соответственно, и с увеличением параметра  $\alpha_2$  величина смещения  $\delta(\theta)$  уменьшается, т.к. состояния процесса  $\lambda(t)$  становятся более различимыми ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ).

Далее рассмотрим случай оценивания параметров плотности в *рекуррентном* потоке, который был изучен в разделе 3.2.

Рассмотрим *общий случай* ( $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ ) задания параметров потока, для которого вычисляются значения оценок  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$ ,  $\hat{\gamma}$  по формулам (3.2.20), (3.2.21), а также находятся выборочные средние  $\hat{M}(\hat{\theta}) = (1/N) \sum_{k=1}^N \hat{\theta}^{(k)}$  и выборочные вариации  $\hat{V}(\hat{\theta}) = (1/N) \sum_{k=1}^N (\hat{\theta}^{(k)} - \theta)^2$ , где  $\theta \in \{z_1, z_2, \gamma\}$ ,  $\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$ .

В *пятом статистическом эксперименте* рассматривается поток при выполнении условия рекуррентности 1 (подраздел 3.2.3). Нетрудно показать, что в данном случае имеем  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 1$ , следовательно,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0$ . При  $T_m = 700$  ед. времени,  $N = 100$ , параметрах потока  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_2 = 1$  устанавливается зависимость  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\hat{V}(\hat{\theta})$  от значений  $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1 = 4, 6, 8, 10, 12$ , при этом положим  $\lambda_1 = \alpha_1$ . Результаты эксперимента приведены в таблицах 4.25–4.27.

Таблица 4.25 – Результаты пятого статистического эксперимента по оценке  $z_1$ 

$z_1$	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{z}_1)$	4,3279	6,1566	8,0599	10,0345	11,9817
$\hat{V}(\hat{z}_1)$	0,1156	0,0254	0,0041	0,0020	0,0007

Таблица 4.26 – Результаты пятого статистического эксперимента по оценке  $z_2$ 

$z_1$	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{z}_2)$	2,1543	2,0167	1,9552	1,8959	1,8463
$\hat{V}(\hat{z}_2)$	0,1347	0,0593	0,0382	0,0066	0,0021
$z_2$	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8

Таблица 4.27 – Результаты пятого статистического эксперимента по оценке  $\gamma$ 

$z_1$	4	6	8	10	12
$\hat{M}(\hat{\gamma})$	-0,7388	-0,3967	-0,2133	-0,1570	-0,1142
$\hat{V}(\hat{\gamma})$	0,0999	0,0278	0,0035	0,0022	0,0006
$\gamma$	-0,4545	-0,2380	-0,1612	-0,1219	-0,0980

Анализ численных результатов, приведенных в таблицах 4.25–4.27, показывает, что с увеличением параметра  $z_1$ , значение  $\hat{V}(\hat{\theta})$  уменьшается, так как условия различимости состояний процесса  $\lambda(t)$  улучшаются. Отметим, что процесс  $\lambda(t)$  преимущественно находится в состоянии  $S_2$ .

В шестом статистическом эксперименте рассматривается поток при выполнении условия рекуррентности 2 (подраздел 3.2.3). Результаты приведены в таблицах 4.28–4.30 при  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,  $T_m = 700$  ед. времени,  $N = 100$ , параметрах потока  $\lambda_1 = 2$ ,  $\alpha_1 = 1$ , где  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\hat{V}(\hat{\theta})$  получены при значениях параметра  $\alpha_2 = z_2 = 2, 4, 6, 8, 10$ .

Таблица 4.28 – Результаты шестого статистического эксперимента по оценке  $z_1$ 

$\alpha_2$	2	4	6	8	10
$\hat{M}(\hat{z}_1)$	3,3323	3,1572	3,0821	3,0321	3,0111
$\hat{V}(\hat{z}_1)$	0,1289	0,0246	0,0062	0,0019	0,0005
$z_1$	3	3	3	3	3

Таблица 4.29 – Результаты шестого статистического эксперимента по оценке  $\alpha_2$ 

$\alpha_2$	2	4	6	8	10
$\hat{M}(\hat{\alpha}_2)$	2,3412	4,1993	6,1353	8,0621	10,0351
$\hat{V}(\hat{\alpha}_2)$	0,1311	0,0387	0,0142	0,0039	0,0009

Таблица 4.30 – Результаты шестого статистического эксперимента по оценке  $\gamma$ 

$\alpha_2$	2	4	6	8	10
$\hat{M}(\hat{\gamma})$	-0,2808	2,7513	1,6152	1,3529	1,2464
$\hat{V}(\hat{\gamma})$	0,1079	0,0197	0,0063	0,0019	0,0006
$\gamma$	-0,6	2,6	1,5333	1,32	1,2285

Анализируя численные результаты, приведенные в таблицах 4.28–4.30, можно заметить, что с увеличением параметра  $\alpha_2$  значение  $\hat{V}(\hat{\theta})$  уменьшается, при этом время пребывания процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_1$  увеличивается. Отметим, что в данном случае события в состоянии  $S_2$  отсутствуют, т.к. нет пуассоновского потока ( $\lambda_2 = 0$ ).

Рассмотрим *особый случай* ( $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ) задания параметров потока. Для него вычисляются значения оценок  $\hat{z}$ ,  $\hat{a}$  по формулам (3.2.25), (3.2.26), а также находятся выборочные средние  $\hat{M}(\hat{\theta}) = (1/N) \sum_{k=1}^N \hat{\theta}^{(k)}$  и выборочные вариации  $\hat{V}(\hat{\theta}) = (1/N) \sum_{k=1}^N (\hat{\theta}^{(k)} - \theta)^2$ , где  $\theta \in \{z, a\}$ ,  $\hat{\theta} \in \{\hat{z}, \hat{a}\}$ .

В седьмом статистическом эксперименте рассматривается поток при выполнении условия рекуррентности 1 (подраздел 3.2.4). В данном эксперименте для начала покажем установление стационарного режима. Положим  $\lambda_1 = 5$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 6$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,  $N = 100$ . Рассмотрим зависимость  $\hat{M}(\hat{\mathbf{z}})$ ,  $\hat{V}(\hat{\mathbf{z}})$  от значений времени моделирования  $T_m = 100, \dots, 1200$  ед. времени с шагом 100. Результаты отражены в таблице 4.31, где последняя строка содержит истинное значение оцениваемого параметра  $z = \alpha_2$ .

Таблица 4.31 – Результаты седьмого статистического эксперимента по установлению стационарного режима

$T_m$	100	200	...	600	700	...	1100	1200
$\hat{M}(\hat{\mathbf{z}})$	5,3576	5,6249	...	5,8612	5,9657	...	5,9656	5,9657
$\hat{V}(\hat{\mathbf{z}})$	0,48257	0,32811	...	0,00979	0,00133	...	0,00131	0,00132
$z$	6	6	...	6	6	...	6	6

Анализ численных результатов, приведенных в таблице 4.31, показывает улучшение качества оценивания с увеличением времени моделирования (в смысле уменьшения выборочной вариации оценки), а также иллюстрирует установление стационарного режима для  $T_m \geq 700$  ед. времени.

Далее в рамках данного эксперимента полагается время моделирования  $T_m = 700$  ед. времени и при  $N = 100$ , параметре  $\alpha_1 = 1$ , вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$  устанавливается зависимость  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\hat{V}(\hat{\theta})$  от значений параметра  $\lambda_1 = 1, \dots, 5$  с шагом 0,5, и, соответственно, параметра  $\alpha_2$ , определяемого по формуле  $z = \alpha_2 = \lambda_1 + \alpha_1$ . Результаты эксперимента отражены на рисунке 4.16 и в таблице 4.32, где две нижние строки – истинные значения оцениваемых параметров.

Таблица 4.32 – Результаты седьмого статистического эксперимента по оценке параметров  $z$  и  $a$

$\lambda_1$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\hat{M}(\hat{z})$	2,3828	2,8452	3,2998	3,7595	4,2147	4,6752	4,8778	5,4126	5,9655
$\hat{V}(\hat{z})$	0,1542	0,1214	0,0894	0,0627	0,0531	0,0255	0,0089	0,0029	0,0013
$\hat{M}(\hat{a})$	0,4389	0,6755	0,9228	1,1673	1,4166	1,6965	1,8837	2,2874	2,3713
$\hat{V}(\hat{a})$	0,1424	0,1184	0,0813	0,0602	0,0444	0,0198	0,0082	0,0027	0,0011
$z$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$a$	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4

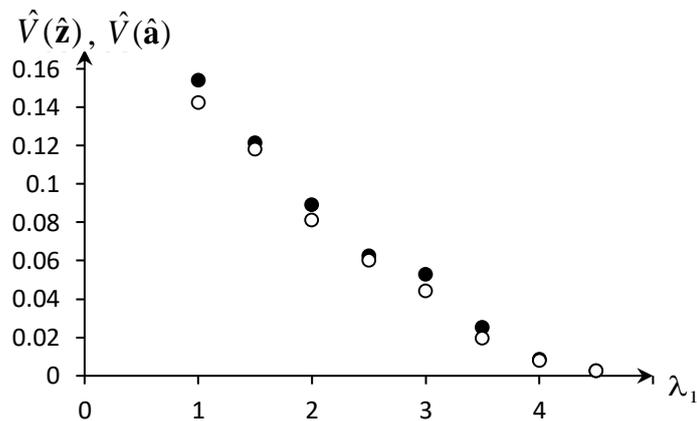


Рисунок 4.16 – График зависимости  $\hat{V}(\hat{z})$  (черный маркер) и  $\hat{V}(\hat{a})$  (белый маркер) от значений параметра  $\lambda_1$

Проводя анализ приведенных в таблице 4.32, а также проиллюстрированных на рисунке 4.16 численных результатов, замечаем, что с увеличением параметра  $\lambda_1$ , и, соответственно, с увеличением  $\alpha_2$ , значение  $\hat{V}(\hat{\theta})$  уменьшается (условия различимости состояний улучшаются). Другими словами, при больших значениях  $\lambda_1 - \lambda_2$  имеют место меньшие значения  $\hat{V}(\hat{\theta})$ . Следует отметить, что в данном случае процесс  $\lambda(t)$  преимущественно находится в состоянии  $S_1$ ; также отметим отсутствие событий в состоянии  $S_2$ , т.к.  $\lambda_2 = 0$ .

В восьмом статистическом эксперименте рассматривается рекуррентный поток при выполнении условия 2 (подраздел 3.2.4), т.е. положим  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0$ . При времени моделирования  $T_m = 700$  ед. времени, количестве реализаций  $N = 100$ , параметрах потока  $\lambda_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ , вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 1$  рассматривается зависимость  $\hat{M}(\hat{\theta})$ ,  $\hat{V}(\hat{\theta})$  от значений параметра  $a = \alpha_2 = 2, 3, 4, 5, 6$ , и, соответственно, параметра  $\lambda_1$ , который определяется по формуле  $\lambda_1 = \lambda_2 + \alpha_2 - \alpha_1$ . Результаты данного эксперимента отражены в таблице 4.33, где две нижние строки содержат истинные значения оцениваемых параметров.

Таблица 4.33 – Результаты восьмого статистического эксперимента по оценке параметров  $z$  и  $a$

$\alpha_2$	2	3	4	5	6
$\lambda_1$	2	3	4	5	6
$\hat{M}(\hat{z})$	3,3274	4,1728	5,0599	6,0396	6,9824
$\hat{V}(\hat{z})$	0,1148	0,0321	0,0042	0,0024	0,0008
$\hat{M}(\hat{a})$	1,6576	3,1635	4,0569	4,9665	5,9817
$\hat{V}(\hat{a})$	0,1032	0,0299	0,0037	0,0022	0,0007
$z$	3	4	5	6	7
$a$	2	3	4	5	6

Анализируя приведенные в таблице 4.33 численные результаты, можно заметить, что увеличение параметра  $\alpha_2$ , и, соответственно, увеличение  $\lambda_1$ , положительно сказывается на условиях различимости состояний, потому значение  $\hat{V}(\hat{\theta})$  уменьшается.

#### 4.4 Проверка качества оценки длительности мертвого времени

Согласно утверждениям 3.1–3.4, как для общего, так и для особого случаев задания параметров потока оценивание длительности мертвого времени  $T$  производится по следующему алгоритму. Обозначим  $f(T) = M_T(\tau)$ . В качестве оценки параметра  $T$  выбирается решение уравнения (3.3.9) / (3.3.10) (в зависимости от задания параметров потока) для коррелированного или уравнения (3.4.5) / (3.4.6) для рекуррентного потока на полуинтервале  $(0, \tau_{\min}]$ , где  $\tau_{\min} = \min_k (\tau_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; если  $f(0) < C < f(\tau_{\min})$ , то  $\hat{T}_{numeric} = \hat{T}$ , если  $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C$ , то  $\hat{T}_{numeric} = \tau_{\min}$ ;  $f(0) \geq C$  то  $\hat{T}_{numeric} = 0$ , где  $\hat{T}_{numeric}$  – численное решение методом Ньютона уравнения (3.3.9) / (3.3.10) или (3.4.5) / (3.4.6) в зависимости от задания параметров потока. Отметим, что применение  $\tau_{\min}$  дает улучшенную оценку параметра  $T$ .

С целью установления качества оценивания длительности мертвого времени проведена серия статистических экспериментов с использованием имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка.

По алгоритму, приведенному выше, находится выборка значений оценок  $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N$  для  $N$  реализаций потока и вычисляются выборочное среднее  $\hat{M}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N \hat{T}_s$ , выборочная вариация  $\hat{V}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N (\hat{T}_s - T)^2$  и оценка смещения  $\delta(\theta) = |\hat{M}(\hat{T}) - T|$  для конкретного эксперимента.

Для начала рассмотрим случай оценивания длительности мертвого времени в *коррелированном* потоке, который был изучен в разделе 3.3.

В *первом статистическом эксперименте* для *общего случая* задания параметров потока рассчитывается зависимость  $\hat{M}(\hat{T})$ ,  $\delta(T)$  от количества реализаций  $N = 50, \dots, 500$  с шагом 50 при заданных значениях времени моделирования  $T_m = 700$  ед. времени, вероятностях  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$  и параметрах потока  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $T = 1$ .

Результаты данного эксперимента приведены в таблице 4.34.

Таблица 4.34 – Результаты первого статистического эксперимента

$N$	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9913	0,9928	0,9918	0,9920	0,9928	0,9930	0,9931	0,9932	0,9930	0,9931
$\delta(T)$	0,0087	0,0072	0,0082	0,0080	0,0072	0,0070	0,0069	0,0068	0,0070	0,0069

Во втором статистическом эксперименте для особого случая задания параметров потока при  $T=1;1,5;2$  изучается зависимость  $\hat{M}(\hat{T})$ ,  $\delta(T)$  от значения времени моделирования  $T_m = 50, 100, \dots, 1000$  ед. времени с шагом 50 при фиксированных значениях  $N = 300$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,65$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,35$ ,  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 1,5$ ,  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = 3$ . Результаты эксперимента продемонстрированы в таблице 4.35.

Таблица 4.35 – Результаты второго статистического эксперимента

	$T_m$	50	100	150	...	700	750	...	950	1000
$T = 1$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,7310	0,8001	0,8298	...	0,9943	0,9939	...	0,9942	0,9943
	$\delta(T)$	0,2690	0,1999	0,1702	...	0,0057	0,0061	...	0,0058	0,0057
$T = 1,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,1875	1,2224	1,2208	...	1,4625	1,4626	...	1,4621	1,4624
	$\delta(T)$	0,3125	0,2776	0,2792	...	0,0375	0,0374	...	0,0379	0,0376
$T = 2$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,6618	1,6891	1,7455	...	1,9312	1,9312	...	1,9315	1,9313
	$\delta(T)$	0,3382	0,3109	0,2545	...	0,0688	0,0688	...	0,0685	0,0687

Анализируя полученные численные результаты, можно заключить:

- 1) найденная оценка является смещенной, впрочем величина оценки смещения относительно исходного значения остается достаточно приемлемой;
- 2) оценка ведет себя стабильнее с увеличением количества реализаций  $N$  и времени моделирования  $T_m$ , что естественно в силу увеличения доступной

информации при равных  $T$ ; также отметим общую тенденцию уменьшения смещения с ростом  $T_m$ ;

3) оценка улучшается (в смысле уменьшения смещения) с уменьшением периода мертвого времени  $T$ , что является естественным в силу меньшей потери событий (информации).

Далее рассмотрим случай оценивания длительности мертвого времени в *рекуррентном* потоке, который был изучен в разделе 3.4.

Цель *третьего статистического эксперимента* – проверка установления стационарного режима в случае выполнения условия рекуррентности 1 раздела 3.4.2 в *общем случае* задания параметров потока. В соответствии с условием рекуррентности имеем  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 1$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0$ . При параметрах потока  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $T = 1,5$  и  $N = 300$  рассмотрим следующие значения времени моделирования  $T_m = 50, 100, \dots, 1000$  ед. времени с шагом 50. В таблице 4.36 приведены численные результаты данного эксперимента.

Таблица 4.36 – Результаты третьего статистического эксперимента

$T_m$	50	100	150	...	700	750	...	950	1000
$\hat{M}(\hat{T})$	1,2095	1,2748	1,3067	...	1,4905	1,4906	...	1,4904	1,4905
$\delta(T)$	0,2905	0,2252	0,1933	...	0,0095	0,0094	...	0,0096	0,0095
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	24,4841	20,0012	18,1038	...	1,7731	1,5871	...	1,1742	1,8421

Целью *четвертого статистического эксперимента* является установление зависимости  $\hat{M}(\hat{T})$ ,  $\hat{V}(\hat{T})$  от количества реализаций  $N$  ( $N = 50, \dots, 500$  с шагом 50) при заданных значениях параметра мертвого времени  $T$  ( $T = 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2$ ), а также проверка качества оценивания при увеличении периода ненаблюдаемости при выполнении условия рекуррентности 2 раздела 3.4.2 для *особого случая* задания параметров потока. В соответствии с условием рекуррентности положим

$\lambda_2 = 0$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_1/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2/\lambda_1) = 0,4$ ,  $P_1^{(1)}(\lambda_2/\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1/\lambda_1) = 0,6$ , а также  $\lambda_1 = 7$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 8$ . Численные результаты данного эксперимента приведены в таблице 4.37.

Таблица 4.37 – Результаты четвертого статистического эксперимента

	$N$	50	100	150	200	...	400	450	500
$T = 0,2$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,1980	0,1986	0,1988	0,1988	...	0,1989	0,1989	0,1988
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	1,0179	0,3475	0,3815	0,2157	...	0,3199	0,2894	0,2971
$T = 0,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,5033	0,5026	0,5024	0,5028	...	0,5024	0,5022	0,5022
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	1,5980	0,7159	0,6791	0,6105	...	0,6971	0,6587	0,6621
$T = 1$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,9913	0,9928	0,9918	0,9920	...	0,9932	0,9930	0,9931
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	3,5483	2,1713	1,9971	1,6105	...	0,9189	0,9541	0,8917
$T = 1,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,4876	1,4880	1,4881	1,4887	...	1,4896	1,4897	1,4896
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	5,7781	3,7421	3,1154	2,9715	...	2,2089	2,2541	2,3517
$T = 2$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,9602	1,9612	1,9621	1,9618	...	1,9630	1,9630	1,9631
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	7,4887	5,3872	5,0082	4,9700	...	4,3489	4,1579	3,9947

Проводя анализ полученных в таблицах 4.36 и 4.37 численных результатов, можно сделать следующие выводы: 1) найденная оценка является состоятельной [50] и смещенной, при этом результаты показывают достаточно приемлемую величину смещения; 2) оценка ухудшается (в смысле увеличения выборочной вариации) с увеличением  $T$ , что является естественным в силу большей потери событий (информации); 3) отмечается установление стационарного режима для  $T_m \geq 700$  (таблица 4.36); 4) количество экспериментов коррелирует со значением мертвого времени  $T$  (таблица 4.37): для достаточно малого значения  $T$  результаты стабилизируются при  $N \geq 100$ , однако при увеличении  $T$  для получения более стабильных результатов необходимо увеличить количество реализаций и положить  $N \geq 300$ .

#### 4.5 Выводы и результаты по четвертой главе

В четвертой главе диссертации:

- осуществлена проверка работоспособности построенной имитационной модели в случае полной и частичной наблюдаемости потока;
- представлена серия статистических экспериментов для установления качества оценивания состояний потока по разработанным алгоритмам оптимального оценивания (подразделы 2.1.5 и 2.2.4);
- проведена серия статистических экспериментов для установления качества оценивания параметров плотности распределения вероятностей и длительности мертвого времени для коррелированного и рекуррентного потоков.

Таким образом, экспериментальная проверка на имитационной модели результатов глав 2 и 3 показала, что построенная имитационная модель соответствует логике представленной математической модели потока (разделы 1.1 и 1.2) и является адекватной.

В результате проверки оценки состояний потока подобраны значения параметров, при которых алгоритм оптимального оценивания состояний потока обеспечивает достаточно приемлемую оценку безусловной вероятности ошибочного решения, причем значение выборочной дисперсии данной оценки мало. Экспериментальная проверка оценивания параметров распределения вероятностей и длительности мертвого времени показала, что найденные оценки являются смещенными, при этом результаты показывают достаточно приемлемую величину смещения. Для рекуррентных потоков оценки являются состоятельными. Отметим, что проведенные эксперименты позволили оценить, при каких комбинациях заданных входных параметров потока алгоритмы оценивания дают меньшие ошибки оценивания в смысле выбранных критериев.

## Заключение

В настоящей диссертации проведено исследование полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка. Поток изучен в случаях его полной и частичной наблюдаемости (при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности, при котором часть событий исходного потока теряется).

В работе доказано, что полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным, а также приводятся условия, при которых поток становится рекуррентным. Для коррелированного потока найдены основные вероятностные характеристики, такие как ковариация и коэффициент корреляции.

Для рассматриваемого потока событий решены основные задачи, возникающие при изучении класса дважды стохастических потоков: оценка состояний, оценка параметров распределения вероятностей длительности интервала между соседними событиями потока и оценка длительности мертвого времени.

Для решения задачи оценивания состояний были разработаны алгоритмы оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка при его полной и частичной наблюдаемости. Алгоритмы построены на основе критерия максимума апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t)$  ( $w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$ ), который обеспечивает минимум полной вероятности ошибки вынесения решения. Статистические эксперименты, выполненные на модельных данных с использованием имитационной модели потока, демонстрируют приемлемую величину оценки полной вероятности ошибки вынесения решения.

Решение задачи оценки параметров распределения осуществлялось при полной наблюдаемости потока. В ходе анализа были выявлены два случая задания параметров потока: общий ( $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ ) и особый ( $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ ). Для обоих случаев задания параметров потока найден явный вид плотности вероятности  $p(\tau)$  длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока, а также явный вид совместной плотности вероятности  $p(\tau_1, \tau_2)$  длительностей двух

соседних интервалов. Задача оценивания параметров  $p(\tau)$  решалась методом моментов для коррелированного и рекуррентного потоков. Проведенные статистические эксперименты показали, что найденные оценки являются смещенными, при этом результаты показывают приемлемую величину смещения оценок от их истинных значений. Для рекуррентных потоков оценки являются состоятельными.

В случае частичной наблюдаемости потока была найдена одномерная и двумерная плотности вероятности длительностей интервалов между соседними событиями потока. Задача оценивания длительности мертвого времени  $T$  решалась методом моментов для коррелированного и рекуррентного потоков при фиксированных остальных параметрах потока. Экспериментальным путем при выбранных наборах параметров потока и выбранных критериях оценивания показана приемлемая величина ошибки оценивания, установлено, что оценка является смещенной. Для рекуррентного потока оценка длительности мертвого времени  $T$  является состоятельной.

Таким образом, предложенные теоретические и практические исследования настоящей диссертации для решения задач оценивания состояний, параметров плотности распределения вероятностей и длительности периода мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка являются результатом данной работы. Результаты диссертационного исследования могут быть использованы при решении прикладных задач сферы массового обслуживания, в частности, при исследовании входящих потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных, компьютерных и вычислительных сетях связи.

Перспектива дальнейшей разработки темы исследования связана с использованием полусинхронного потока событий второго порядка в качестве математической модели входящего потока заявок при проектировании систем массового обслуживания.

### Список использованной литературы

1. Апанасович В. В. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте / В. В. Апанасович, А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский. – Минск: Университетское, 1988. – 256 с.
2. Башарин Г. П. Лекции по математической теории телетрафика / Г. П. Башарин. – М.: РУДН, 2007. – 268 с.
3. Башарин Г. П. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения: учеб. пособие / Г. П. Башарин, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина. – М.: РУДН, 2008. – 137 с.
4. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – Ч. 1, № 6. – С. 92–99.
5. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1980. – Ч. 2, № 1. – С. 55–61.
6. Березин Д. В. Численные результаты оптимальной оценки состояний модулированного МАР-потока событий / Д. В. Березин, Л. А. Нежелская // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 151–157.
7. Бронштейн О. И. Об оптимальных приоритетах в системах массового обслуживания / О. И. Бронштейн, В. В. Рыков // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1965. – № 6. – С. 28–37.
8. Бушланов И. В. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий / И. В. Бушланов, А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9. – С. 76–93.
9. Васильева Л. А. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости / Л. А. Васильева, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 12. – С. 69–79.

10. Васильева Л. А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости / Л. А. Васильева, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 3. – С. 179–184.

11. Вишневский В.М. Оценка производительности широкополосных беспроводных сетей вдоль протяженных транспортных магистралей / В. М. Вишневский, А. Н. Дудин, Д. В. Козырев, А. А. Ларионов // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015) = Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015). – Москва: Изд-во РУДН, 2015. – С. 241–256.

12. Вишневский В. М. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей / В. М. Вишневский, А. А. Ларионов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 1. – С. 36–50.

13. Вишневский В. М. Оценка пропускной способности локальной беспроводной сети при высокой нагрузке и помехах / В. М. Вишневский, А. И. Ляхов // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 8. – С. 81–96.

14. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

15. Воробьев Н. М. Об управлении системой массового обслуживания одного вида // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1967. – № 3. – С. 86–93.

16. Гайдамака Ю. В. Оценка времени установления соединения для услуги IPTV / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова // Вест. РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2014. – № 1. – С. 23–29.

17. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

18. Головкин Н. И. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головкин, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 50–64.

19. Головкин Н. И. Краевые задачи в стационарных системах массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока / Н. И. Головкин, В. В. Катрахов, Т. А. Писаренко // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 305–312.

20. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вест. Том. гос. ун-та. – 2003. – № 6. – С. 232–239.

21. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, О. В. Ниссенбаум // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2005. – № 10. – С. 35–49.

22. Горцев А. М. Оценивание параметра непродлеваемого мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий / А. М. Горцев, М. Е. Завгородняя // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 40. – С. 32–40.

23. Горцев А. М. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий / А. М. Горцев, И. С. Климов // Радиотехника. – 1996. – № 2. – С. 8–11.

24. Горцев А. М. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости / А. М. Горцев, И. С. Климов // Радиотехника. – 1991. – № 12. – С. 3–7.

25. Горцев А. М. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 1. – С. 31–41.

26. Горцев А. М. Управление и адаптация в системах массового обслуживания / А. М. Горцев, А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978. – 208 с.

27. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний / А. М. Горцев, В. Л. Зуевич // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №2. – С. 44–65.

28. Горцев А. М. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке / А. М. Горцев, А. А. Калягин, Л.А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – №1. – С. 27–37.

29. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, А. А. Калягин, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – №2 (27). – С. 19–29.

30. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока / А. М. Горцев, М. А. Леонова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №1. – С. 33–47.

31. Горцев А. М. Сравнение МП- и ММ- оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / А. М. Горцев, М. А. Леонова, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – №4 (25). – С. 32–42.

32. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 6. – С. 232–239.

33. Горцев А. М. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – №1. – С. 18–23.

34. Горцев А. М. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Радиотехника. – 1995. – № 7–8. – С. 6–10.

35. Димитров Б. Н. Периодические пуассоновские процессы и распределения с почти отсутствующей памятью / Б. Н. Димитров, В. В. Рыков, З. Л. Круглый // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 85–100.

36. Дудин А. Н. Расчет необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях / А. Н. Дудин, В. И. Клименок // Информатизация образования. – 2005. – № 4. – С. 56–68.

37. Дудин А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок. – Минск: Изд-во БГУ, 2000. – 175 с.

38. Завгородняя М. Е. Оценивание параметров простейшего потока событий и мертвого времени, распределенного по закону Рэлея / М. Е. Завгородняя, Ю. Е. Табольжина // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2018. – Т. 302. – С. 129–133.

39. Зорин А. В. Оптимальный алгоритм обслуживания с разделением времени и переналадками для дважды стохастических входных и ветвящихся вторичных потоков // Вест. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2008. – № 1. – С. 100–107.

40. Зорин А. В. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени / А. В. Зорин, М. А. Федоткин // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 7. – С. 102–111.

41. Калягин А. А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий / А. А. Калягин, Л. А. Нежелская // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 23–32.

42. Кеба А.В. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени / А. В. Кеба, Л. А. Нежелская // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы

Тринадцатой Международной конференции, 07–09 сентября 2020 г. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2020. – С. 85–86.

43. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. – 1959. – Т. 3, № 6. – С. 97–111.

44. Кениг Д. Методы теории массового обслуживания / Д. Кениг, Д. Штойян. – М.: Радио и связь, 1981. – 127 с.

45. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

46. Левин А. А. Теоритические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1968. – 504 с.

47. Лезарев А. В. Средняя длительность периода занятости в однолинейной системе массового обслуживания с дважды стохастическим синхронным входящим потоком / А. В. Лезарев, А. Ф. Терпугов // Вест. Том. гос.ун-та. – 2004. – № 284. – С. 149–152.

48. Лившиц К. И. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат / К. И. Лившиц, Я. С. Бублик // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 1 (10). – С. 66–77.

49. Малинковский Ю. В. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений / Ю. В. Малинковский, Е. В. Коробейникова // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 43–56.

50. Малинковский Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика) / Ю. В. Малинковский. – Гомель: УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. – 146 с.

51. Медведев Г. А. Воздействие импульсных потоков Пальма на радиосхемы с емкостными накопителями I // Изв. Вузов СССР, Радиофизика. – 1961. – Т. 4, № 2. – С. 275–281.

52. Медведев Г. А. Воздействие импульсных потоков Пальма на радиосхемы с емкостными накопителями II // Изв. Вузов СССР, Радиофизика. – 1962. – Т. 5, № 3. – С. 549–560.

53. Моисеев А. Н. Исследование высокоинтенсивного МАР- потока / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Изв. Том. политехнич. ун-та. – 2013. – Т. 322, № 2. – С. 16–18.

54. Назаров А. А. Адаптация в управляемых системах массового обслуживания / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов // Автоматика и телемеханика. – 1976. – Вып. 7. – С. 76–79.

55. Назаров А. А. Исследование МАР-потока методом асимптотического анализа N-го порядка / А. А. Назаров, С. В. Лопухова // Вест. Том. гос. ун-та. – 2006. – № 293. – С. 110–115.

56. Назаров А. А. Применение общего подхода к анализу однолинейной марковской модели сети связи с асинхронным дважды стохастическим входящим потоком / А. А. Назаров, С. А. Цой // Научное творчество молодежи: материалы IX Всерос. конф. Анжеро-Судженск, 15–16 апреля 2005 г. – Томск, 2005. – С. 45–47.

57. Назаров А. А. Теория вероятностей и случайных процессов / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НЛТ, 2006. – 204 с.

58. Небеев А. В. Исследование многоканальных систем передачи информации методом оптимизации стратегии распределительного устройства / А. В. Небеев, В. П. Ревельс // Проблемы передачи информации. – 1970. – Т. 6, вып. 3. – С. 96–99.

59. Нежелская Л. А. Оценивание длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий методом моментов / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2019. – Т. 62, № 9. – С. 94–100.

60. Нежелская Л. А. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в обобщенном асинхронном потоке событий / Л. А. Нежелская, А. А. Першина // Информационные технологии и математическое

моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова, 26–30 июня 2019 г. – Томск, 2019. – Ч. 2. – С. 352–357.

61. Нежелская Л. А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. – 2000. – №269. – С. 95–98.

62. Нежелская Л. А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – №1 (30). – С. 57–67.

63. Нежелская Л. А. Имитационная модель полусинхронного потока второго порядка / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2016. – Т. 299. – С. 109–114.

64. Нежелская Л. А. Статистические эксперименты на имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его неполной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2018. – Т. 302. – С. 149–156.

65. Нежелская Л. А. Оценивание методом моментов параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями рекуррентного полусинхронного потока второго порядка в особом случае / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2019. – Т. 303. – С. 14–23.

66. Нежелская Л. А. Апостериорные вероятности состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях неполной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур ICAM-2018. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2018. – С. 125–126.

67. Нежелская Л. А. Оптимальная оценка состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости / Л. А.

Нежелская, Д. А. Тумашкина // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018): материалы XVII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова, 10–15 сент. 2018 г. – Томск: Издательство НТЛ, 2018. – С. 119–124.

68. Нежелская Л. А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2017. – Т. 301. – С. 97–105.

69. Нежелская Л. А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка при непродлеваемом мертвом времени / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 46. – С. 73–82.

70. Нежелская Л. А. Оценивание методом моментов длительности непродлеваемого мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 52. – С. 73–82.

71. Нежелская Л. А. Оценка длительности непродлеваемого мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий второго порядка методом моментов / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 53. – С. 82–92.

72. Нежелская Л. А. Оценка параметров плотности вероятности длительности интервала между событиями в рекуррентном полусинхронном потоке второго порядка методом моментов / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): материалы XVIII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова, 26–30 июня 2019 г. Ч. 2. – Томск: Издательство НТЛ, 2019. – С. 364–369.

73. Нежелская Л. А. Плотность вероятности значений длительности интервала между событиями полусинхронного потока второго порядка в условиях

неполной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, Д. А. Тумашкина // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур ICAM-2020. – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2020. – С. 95–96.

74. Ниссенбаум О. В. Оценка параметров и состояний асинхронного альтернирующего потока с иницированием лишних событий: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук / О. В. Ниссенбаум. – Томск, 2009. – 155 с.

75. Пагано М. Модели телетрафика / М. Пагано, В. В. Рыков, Ю. С. Хохлов. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 178 с.

76. Рыков В. В. Об оптимальных динамических приоритетах в СМО / В. В. Рыков, Э. Е. Лемберг // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1967. – № 1. – С. 25–34.

77. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: пер. с англ. / под ред. И. Н. Коваленко. – М.: Сов. радио, 1971. – 520 с.

78. Самуйлов А. К. Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети / А. К. Самуйлов, Ю. В. Гайдамака // Т-Comm-Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7, № 11. – С. 77–81.

79. Терпугов А. Ф. Дважды стохастический поток событий с независимыми значениями интенсивности / А. Ф. Терпугов, Н. Е. Царабаева // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 3–7.

80. Фархадов М. П. Двухфазная модель с неограниченными очередями для расчета характеристик и оптимизации речевых порталов самообслуживания / М. П. Фархадов, Н. В. Петухова, Д. В. Ефросинин, О. В. Семенова // Проблемы управления. – 2010. – № 6. – С. 53–57.

81. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / В. Феллер. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 487 с.; Т. 2 – 752 с.

82. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления / Э. М. Хазен. – М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.

83. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания // Труды математического института им. В. А. Стеклова. – 1955. – Т. 49. – С. 3–122.

84. Хинчин А. Я. О среднем времени простоя станков // Математический сборник. – 1933. – Т. 40, № 2. – С. 119–123.

85. Царенков Г. В. ВМАР-поток как модель трафика реальной сети // Материалы междунар. науч. конф. «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей». – Минск, 2005. – С. 209–214.

86. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М.: Изд-во “Наука”, 1969. – 424 с.

87. Bakholdina M. Joint probability density of the intervals length of the modulated semy-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions / M. Bakholdina, A. Gortsev // Communications in Computer and Information Science. – 2014. – Vol. 487. – P. 18–25.

88. Banik A. D. ВМАР/G/1/N queue with vacations and limited service discipline / A. D. Banik, U. C. Gupta, S. S. Pathak // Applied mathematics and computation. – 2006. – Vol. 180, № 2. – P. 707–721.

89. Basharin G. P. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks / G. P. Basharin, Y. V. Gaidamaka, K. E. Samouylov // Automatic Control and Computer Science. – 2013. – Vol. 47, is. 2. – P. 62–69.

90. Benes V. E. Programming and control problems arising from optimal routing in telephone networks // Bell System Technical journal. – 1966. – Vol. 45, No. 9. – P. 1373–1438.

91. Cox D. Point processes / D. Cox, V. Isham. – Chapman and Hall, 1980. – 181 p.

92. Cox D. R. Some statistical methods connected with series of events // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. – 1955. – Vol. 17, No. 2. – P. 129–164.

93. Cox D. R. The theory of stochastic processes / D. R. Cox, H. D. Miller. – New York: Wiley, 1965. – 398 p.

94. Cox D.R. The analysis of non–Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. – 1955. – Vol. 51, No. 3. – P. 433–441.

95. Gortsev A. M. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events / A. M. Gortsev, L. A. Nezhelskaya // *Measurement Techniques*. – 2003. – Vol. 46, No. 6. – P. 536–545.

96. Gortsev A. M. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time / A. M. Gortsev, L. A. Nezhelskaya, A. A. Solovev // *Automation and Remote Control*. – 2012. – Vol. 73, No. 8. – P. 1316–1326.

97. Gortsev A. M. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable / A. M. Gortsev, I. S. Klimov // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 1992. – Vol. 47, is. 1. – P. 33–38.

98. Gortsev A. M. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events / A. M. Gortsev, I. S. Klimov // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 1993. – Vol. 48, is. 10. – P. 40–45.

99. Gortsev A. M. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method / A. M. Gortsev, L. A. Nezhel'skaya // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 1996. – Vol. 50, is. 1. – P. 56–63.

100. Gortsev A. M. Estimation of the states of an MC – stream of events in the presence of measurement errors / A. M. Gortsev, L. A. Nezhel'skaya, T. I. Shevchenko // *Russian Physics Journal*. – 1993. – Vol. 36, No. 12. – P. 1153–1167.

101. Gortsev A. M. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events / A. M. Gortsev, L. A. Nezhelskaya, // *Discrete Mathematics and Applications*. – 2011. – Vol. 21, No. 3. – P. 283–290.

102. Ireland R. Optimal control of customer-flow through a system of parallel queues / R. Ireland, M. E. Thomas // *International Journal of Systems Science*. – 1972. – Vol. 2, is. 4. – P. 401–410.

103. Kendall D. G. Some problems in the theory of queues // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. – 1951. – Vol. 13, No. 2. – P. 151–185.

104. Kingman J. F. C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1964. – Vol. 60, is. 4. – P. 923–930.
105. Klimenok V. Tandem queueing system with correlated input and cross-traffic / V. Klimenok, A. Dudin, V. Vishnevsky // Communications in Computer and Information Science. – 2013. – Vol. 370. – P. 416–425.
106. Lucantoni D. M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics. Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7, No. 1. – P. 1–46.
107. Lucantoni D. M. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue / D. M. Lucantoni, M. F. Neuts // Communications in Statistics. Stochastic Models. – 1994. – Vol. 10, No. 3. – P. 575–598.
108. Neuts M. F. A queue subject to extraneous phase channels // Advances in Applied Probability. – 1971. – Vol. 3, No. 1. – P. 78–119.
109. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – Vol. 16. – P. 764–779.
110. Nezhel'skaya L. A. Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 59, No. 5. – P. 651–662
111. Nezhelskaya L. Estimation of the probability density parameters of the interval duration between events in correlated synchronous generalized flow of the second order / L. Nezhelskaya, M. Pagano, E. Sidorova // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1109 : Revised Selected Papers of the 18th Int. Conf. ITMM 2019. Saratov, Russia, June 10–13, 2019. – P. 202–216.
112. Nezhelskaya L. Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability / L. Nezhelskaya, E. Sidorova // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912 : Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Selected Papers of the 17th Int. Conf. ITMM 2018, WRQ 2018. Tomsk, Russia, September 10–13, 2018. – P. 157–171.

113. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Science*. – 2014. – Vol. 487. – P. 342–350.

114. Nezhelskaya L. Estimation of the Probability Density Parameters of the Interval Duration between Events in Correlated Semi-synchronous Event Flow of the Second Order by the Method of Moments / L. Nezhelskaya, D. Tumashkina // *Communications in Computer and Information Science*. – 2019. – Vol. 1109. – P. 60–72.

115. Nezhelskaya L. Investigation of the Estimates of the Probability Density Parameters in Correlated Semi-synchronous Event Flow of the Second Order / L. Nezhelskaya, D. Tumashkina // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2019) = Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2019): материалы XXII Междунар. науч. конф., Москва, 23–27 сент. 2019 г. – Москва: Изд-во РУДН, 2019. – С. 124–131.*

116. Nezhelskaya L. Method of Moments for the Estimation of the Probability Density Parameters in Correlated Semi-synchronous Event Flow of the Second Order / L. Nezhelskaya, D. Tumashkina // *Communications in Computer and Information Science*. – 2019. – Vol. 1141. – P. 338–351.

117. Nezhelskaya L. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability / L. Nezhelskaya, D. Tumashkina // *Communications in Computer and Information Science*. – 2018. – Vol. 912. – P. 93–105.

118. Normey-Rico J. E. Control of dead-time process / J. E. Normey-Rico. – London : Springer-Verlag, 2007. – 462 p.

119. Riordan J. Stochastic service systems / J. Riordan. – New York: John Wiley & Sons, 1962. – 139 p.

120. Romani J. A queueing model with a variable number of channels // *Trabajos de estadística*. – 1957. – Vol. 8, No. 3. – P. 175–189.

121. Syski R. Introduction to congestion theory in telephone systems / R. Syski. – Edinburgh and London: Oliver and Boyd, 1960. – 742 p.

122. Takacs L. M. Introduction to the theory of queues / L. M. Takacs. – New York: Oxford University Press, 1962. – 584 p.

123. Tsitsiashvili G. Sh. Synergetic effects in multiserver queueing systems with alternating input flow / G. Sh. Tsitsiashvili, M. A. Osipova // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9, № 60. – P. 2953–2956.

124. Vasil'eva L. A. Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability / L. A. Vasil'eva, A. M. Gortsev // Automation and Remote Control. – 2002. – Vol. 63, is. 3. – P. 511–515.

125. Vishnevsky V. M. Methods of performance evaluation of broadband wireless networks along the long transport routes / V. M. Vishnevsky, A. N. Dudin, D. V. Kozyrev, A. A. Larionov // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 638. – P. 354–365.

126. Vishnevsky V. M. Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks / V. M. Vishnevsky, O. V. Semenova. – London: Academic Publishing, 2012. – 316 p.

127. Zorine A. V. On ergodicity conditions in a polling model with Markov modulated input and state-dependent routing // Queueing Systems. – 2014. – Vol. 76, No. 2. – P. 223–241.

## Приложение А

(обязательное)

### Имитационное моделирование

Для исследования сложных систем в настоящее время широко применяется известный метод, имеющий название *имитационное моделирование*. Идея метода состоит в том, что функционирование сложной системы «имитируется» на ЭВМ в той последовательности простейших действий, которая справедлива для процесса, который моделируется. Математической моделью процесса функционирования сложной системы является определенный алгоритм, который реализуется на ЭВМ и позволяет по имеющимся значениям параметров (что является начальными условиями) и состоянию системы в определенный временной момент найти характеристики, которые необходимы для решения практических задач.

При достаточно большом количестве априорной информации о поведении реальной системы и правильном ее моделировании, имитационная модель характеризуется, как правило, большей близостью к реальной системе, чем математическая модель.

В свою очередь, работа с имитационной моделью системы представляет собой такой эксперимент, который можно сравнить с физическим экспериментом. Внешние факторы, параметры модели зачастую меняются в ходе эксперимента, также может варьироваться и ее структура. В связи с данной особенностью имитационная система отвечает на вопросы только в статистическом смысле.

В процессе имитационного моделирования система разделяется на более простые части, формулируются гипотезы о том, как ведет себя система в целом и ее отдельные части. В каждом блоке может использоваться свой математический аппарат, который более удобен для описания данного блока (алгебраические, дифференциальные, интегральные уравнения, теория вероятности и случайных процессов, математическая статистика и др.). Такой блочный принцип позволяет устанавливать нужные пропорции между точностью описания отдельного блока, обеспеченностью его необходимой информацией и скоростью действия.

Вводится время, которое моделирует ход времени в реальной системе в зависимости от поставленных перед исследователем вопросов. Случайным параметрам,

которые определяют модель, присваиваются определенные значения, далее в процессе моделирования для этих параметров находят новые значения. В связи с использованием в такой ситуации случайных величин возникает необходимость в многократном достаточно большом количестве повторений статистических экспериментов с имитационной моделью и в последующем анализе полученных результатов. В целом, чем больше повторений статистического эксперимента, тем точнее результат.

Моделирование значений случайных величин – моментов наступления событий полусинхронного потока второго порядка в условиях непродлевающегося мертвого времени – осуществлено по формулам, которые получены *методом обратных функций* из экспоненциального распределения. Имитационная модель рассматриваемого потока событий разработана и отлажена на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013.

Функция распределения длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка как в первом, так и во втором состоянии процесса  $\lambda(t)$  имеет вид  $F_1(t) = 1 - e^{-\theta t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $\theta \in \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1\}$ ; функция распределения длительности пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии имеет вид  $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$ ,  $t \geq 0$ .

В соответствии с методом обратных функций обозначим  $F_1(t) = \gamma(t)$ . Тогда имеем  $\gamma(t) = 1 - e^{-\theta t}$ ,  $t \geq 0$ , откуда находим формулу моделирования длительности интервалов между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка следующего вида:

$$t = -\frac{1}{\theta} \ln(1 - \gamma), \theta \in \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1\},$$

где  $\gamma$  – равномерно распределенная на интервале (0, 1) случайная величина,  $\lambda_i$  – параметр экспоненциального распределения пуассоновского потока в  $i$ -м состоянии процесса  $\lambda(t)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\alpha_1$  – параметр экспоненциального распределения пуассоновского потока в первом состоянии процесса  $\lambda(t)$ .

Аналогичным образом, согласно функции  $F_2(t)$ , находится формула моделирования длительности пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии.

## Приложение Б

(обязательное)

### Блок-схема имитационной модели

На рисунке Б.1 представлена блок-схема алгоритма имитационного моделирования полусинхронного потока событий второго порядка при его полной наблюдаемости ( $T = 0$ ). При построении блок-схемы введены обозначения:

- 1)  $T_m$  – время моделирования;
- 2) вероятности  $P1 = P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1)$ ,  $P2 = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1)$ ,  $P3 = P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)$ ,  $P4 = P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)$ ;
- 3)  $k$  – текущее состояние процесса  $\lambda(t)$ ;
- 4)  $X$  – значение равномерно распределенной на интервале  $(0;1)$  случайной величины, генерируемой с помощью датчика псевдослучайных чисел;
- 5)  $i$  – номер итерации алгоритма;
- 6)  $t$  – момент наступления события потока;
- 7)  $\tau_1, \tau_2$  – значения длительностей интервалов между соседними событиями.

Результатом алгоритма является вектор  $\mathbf{t} = (t_1, t_1, \dots, t_n)$  моментов наступления событий полусинхронного потока второго порядка, где  $0 < t_1 < t_1 < \dots < t_n < T_m$ .

Описание блоков, представленных на рисунке Б.1:

*Блок 1.* Начало алгоритма и инициализация параметров.

*Блок 2.* Розыгрыш начального состояния процесса  $\lambda(t)$ .

*Блок 3.* Генерация длительности интервала между соседними событиями потока в текущем состоянии  $k$  процесса  $\lambda(t)$ .

*Блок 4.* Вывод момента  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , наступления события потока и переход на следующую итерацию алгоритма.

*Блок 5.* Завершение алгоритма по достижении значения  $T_m$ .

На рисунке Б.2 представлена блок-схема алгоритма имитационного моделирования полусинхронного потока событий второго порядка в условиях его частичной наблюдаемости ( $T \neq 0$ ).

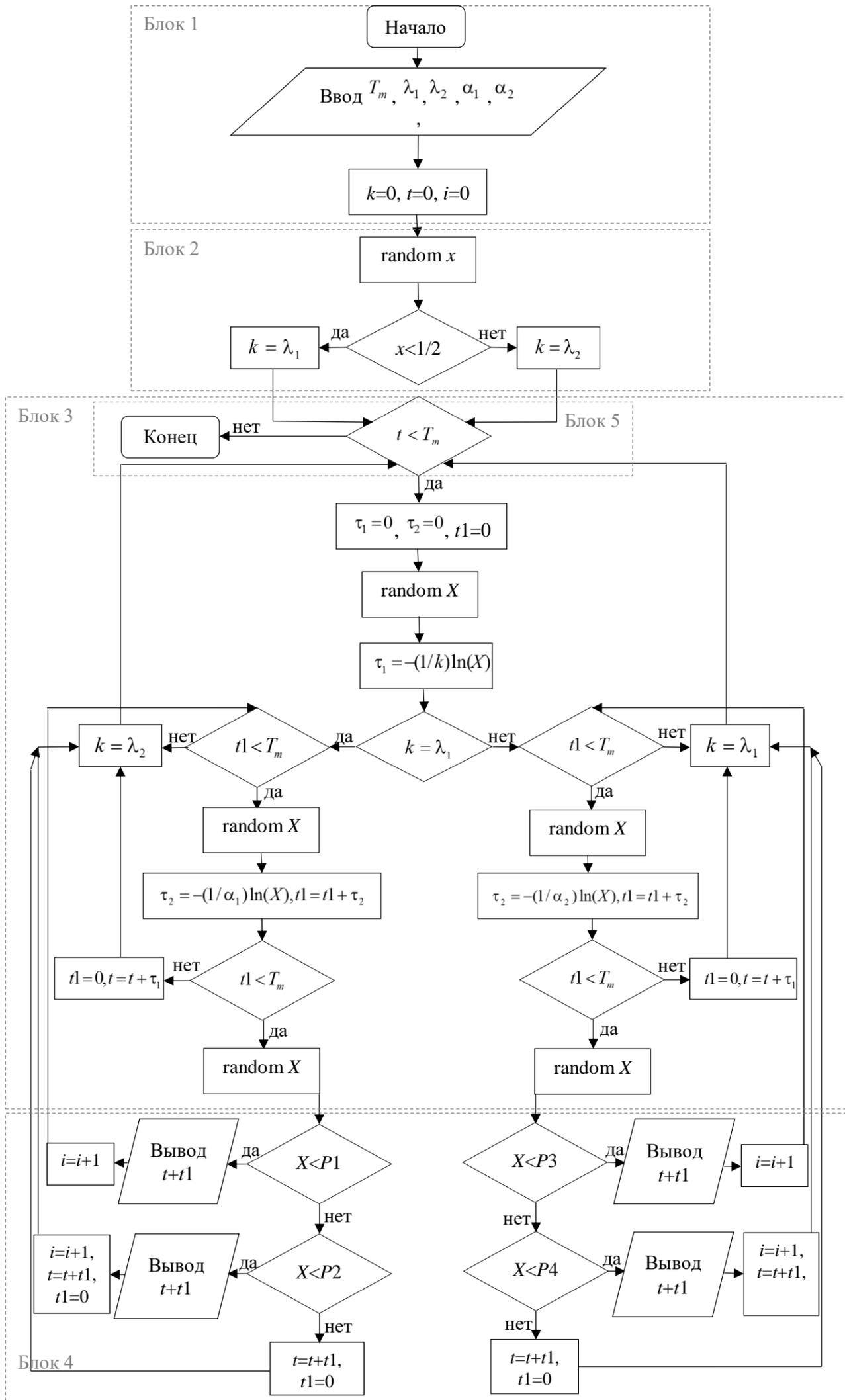


Рисунок Б.1 – Блок-схема имитационного моделирования полусинхронного потока событий второго порядка при  $T = 0$

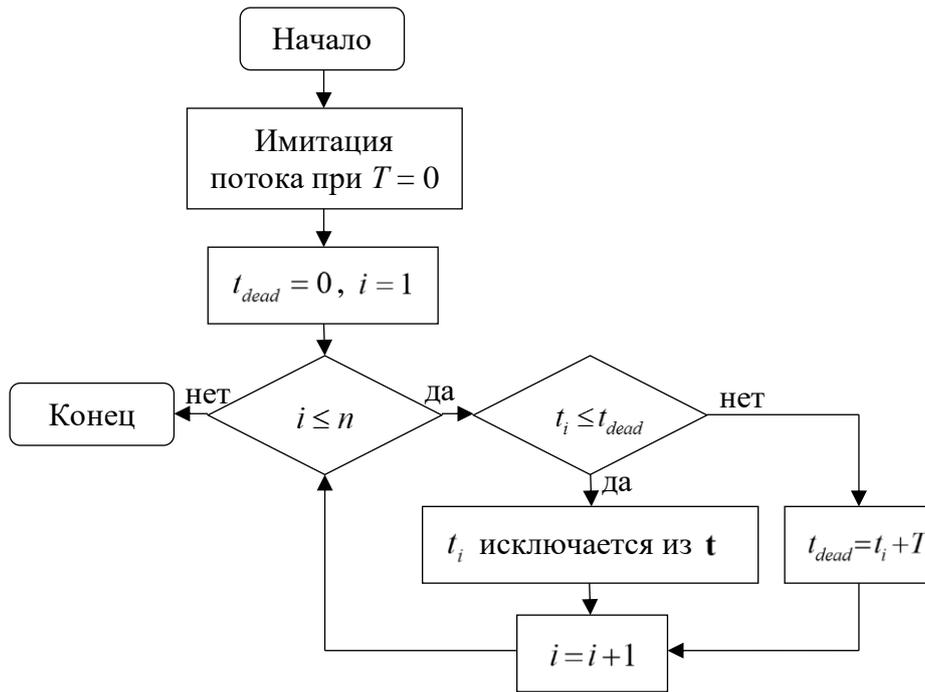


Рисунок Б.2 – Блок-схема имитационного моделирования полусинхронного потока событий второго порядка при  $T \neq 0$

**Приложение В**

(справочное)

**Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ**

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по образовательной деятельности  
Национального исследовательского Томского  
государственного университета,  
кандидат исторических наук, доцент

\_\_\_\_\_ Луков Евгений Викторович

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 г.

**АКТ****о внедрении результатов кандидатской диссертации Тумашкиной Д. А.  
в учебный процесс НИ ТГУ**

Настоящим подтверждается, что результаты диссертации Тумашкиной Д. А. «Оценка состояний, длительности мертвого времени и параметров распределения в полусинхронном потоке событий второго порядка», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.01 –Системный анализ, управление и обработка информации, используются в учебном процессе Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета при проведении занятий по дисциплине «Имитационное моделирование» для студентов 4 курса (бакалавриат), а также в лекционных курсах «Оценка состояний дважды стохастических потоков событий» и «Оценка параметров дважды стохастических потоков событий» для студентов 2-го года обучения (магистратура).

Директор ИПМКН,

доктор технических наук, доцент

А. В. Замятин

Заведующий кафедрой

прикладной математики ИПМКН,

доктор технических наук, профессор

А. М. Горцев